Διαλεξη 16

Ασκηση Διαλεξης 16 (Το Λημμα του Lions)

Εστω X_1, X_2, X_3 χωροι Banach που ικανοποιουν

$$X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X_3 .$$

Εστω οτι $X_1 \hookrightarrow\hookrightarrow X_2$. Τοτε δοθεντος $\varepsilon > 0$

$\exists\ K(\varepsilon) > 0$ τ.ω. $\forall\, y \in X_1$ ισχυει

$$\|y\|_{X_2} \leq \varepsilon \|y\|_{X_1} + K(\varepsilon) \|y\|_{X_3}$$

Υποδειξη: Με εις ατοπον απαγωγη

A) Απορροιες της Ανισοτητας της Poincaré με Μεσο Ορο

Υπενθυμιζουμε (Διαλεξη 15, σ 97)

Θεωρημα 1: $U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμενο, ανοικτο, $\partial U \in C^1$, $1 \leq p \leq \infty$

$\exists\ C = C(n, p, U)$ τ.ω.

$$(1) \qquad \|u - ⨍_U u\|_{L^p(U)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(U)}$$

Πόρισμα 9

(2) $$\left\| u - \fint_{B(x,r)} u \right\|_{L^p(B(x,r))} \leq C r \|\nabla u\|_{L^p(B}$$

(ανοικτή μπάλα)

$$\forall\ B(x,r) \subset \mathbb{R}^n,\ \forall\ u \in W^{1,p}(B^\circ(x,r))$$

Απόδειξη

$U = B^\circ(x,1)$

(1) $\Rightarrow$

(3) $$\left\| u - \fint_{B^\circ(x,1)} u \right\|_{L^p(B^\circ(x,1))} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(U)}$$

και η (2) ισχύει

Γενικότερα περνώντας με αλλαγή μεταβλητών:

Δοθείσης $u : B(x,r) \longrightarrow \mathbb{R}$ θέτουμε

$$v(y) = u(x+ry), \quad |y| \leq 1$$

(3) $\Rightarrow$

(4) $$\left\| v - \fint_{B^\circ(0,1)} v \right\|_{L^p(B(0,1))} \leq C \|\nabla_y v\|_{L^p(B(0,1))}$$

$$\fint_{B^\circ(0,1)} v\, dy = \fint_{B^\circ(0,1)} u(\underbrace{x+ry}_{\xi})\, dy = \left(\int_{B^\circ(x,r)} u(\xi) \cancel{\frac{dy}{d\xi}}^{\frac{1}{r^n}}\, d\xi \right) \frac{1}{|B^\circ(0,1)|}$$

$$= \fint_{B^\circ(x,r)} u\, d\xi$$

$$\nabla_y v = (\nabla_\xi u)\frac{\partial \xi}{\partial y} = r\,\nabla_\xi u$$

$$\left(\int_{B(0,1)} |\nabla_y v|^p dy\right)^{1/p} = r\left(\int_{B(x,r)} |\nabla_\xi u|^p \frac{dy}{d\xi} d\xi\right)^{1/p} = r\, r^{-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B)}$$

(3)
$$\left\| v - \fint_{B^0(0,1)} v \right\|_{L^p(B(0,1))}$$

$$\overset{(\alpha)}{=} \left(\int_{B(0,1)} \left| v - \fint_{B^0(x,r)} u \, d\xi \right|^p dy\right)^{1/p} = \left(\int_{B(x,r)} \left| u - \fint_{B^0(x,r)} u \, d\xi \right|^p \frac{dy}{d\xi} d\xi\right)^{1/p}$$

$$\frac{1}{r^n}$$

$$= r^{-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,r)} \left| u - \fint_{B^0(x,r)} u\, d\xi \right|^p d\xi\right)^{1/p}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

$\square$

<u>Παρατήρηση 3</u> : Οι χώροι $W^{1,n}$ και BMO
(Bounded Mean Oscillation)

$$W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow BMO$$ (John - Nirenberg)

, <u>$n > 1$</u>

<u>Ορισμός</u>

$$[u]_{BMO(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B(x,r) \subset \mathbb{R}^n} \left\{ \fint_{B(x,r)} \left| u - \fint_{B(x,r)} u \right| dy \right\}$$

(ημινόρμα)

Απόδειξη Παρατήρησης

$$\fint_{B(x,r)} \left| u - \fint_{B(x,r)} u \right| dy \overset{\text{Παρατ. 2}}{\leq} C r \fint_{B(x,r)} |\nabla u| \, dy$$

$$\leq C r \frac{1}{|B(x,r)|} \left[\left(\int_{B(x,r)} |\nabla u|^n dy \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{B(x,r)} 1^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]$$

$$= \bar{C} r \left(r^n \right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{|B(x,r)|} \left(\int_{B(x,r)} |\nabla u|^n dy \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \bar{C} r^n \frac{1}{|B(x,r)|} \left(\int_{B(x,r)} |\nabla u|^n dy \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \bar{C} \left(\int_{B(x,r)} |\nabla u|^n dy \right)^{1/n} .$$

$\square$

Άσκηση 2 Διάλεξης 16

$$[u]_{BMO(\mathbb{R}^n)} = 0 \implies u \equiv \text{σταθερά}.$$

Άσκηση 3 Διάλεξης 16

Δείξτε ότι η $\log|x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$

$\implies L^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq BMO(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

Σημείωση

$u(x) = \log|x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$

$\int_K e^{u(x)} dx < \infty \quad \forall K$ συμπαγές στον $\mathbb{R}^n$

Τρόπο τινά η $\log|x|$ είναι αντιπροσωπευτικό στοιχείο του χώρου BMO :

Αν $g \in BMO \Rightarrow \int_K e^{c|g(x)|} dx < \infty$

$\forall \; c < 1$. (John - N.)

(θ. John-Nirenberg).