Έπεται ότι $\exists\, x_0 \in \partial B$, $x_0 \in C$.

Hopf $\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$

$\cancel{\text{⊠}}$ διότι u max στο x_0!

$(\nabla u(x_0) = 0)$.

$\square$

Ασκήσεις για τις διακοπές

16, 17, 18, 19, 20, 21 Κεφ 5, Evans

1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12.

#

∂U

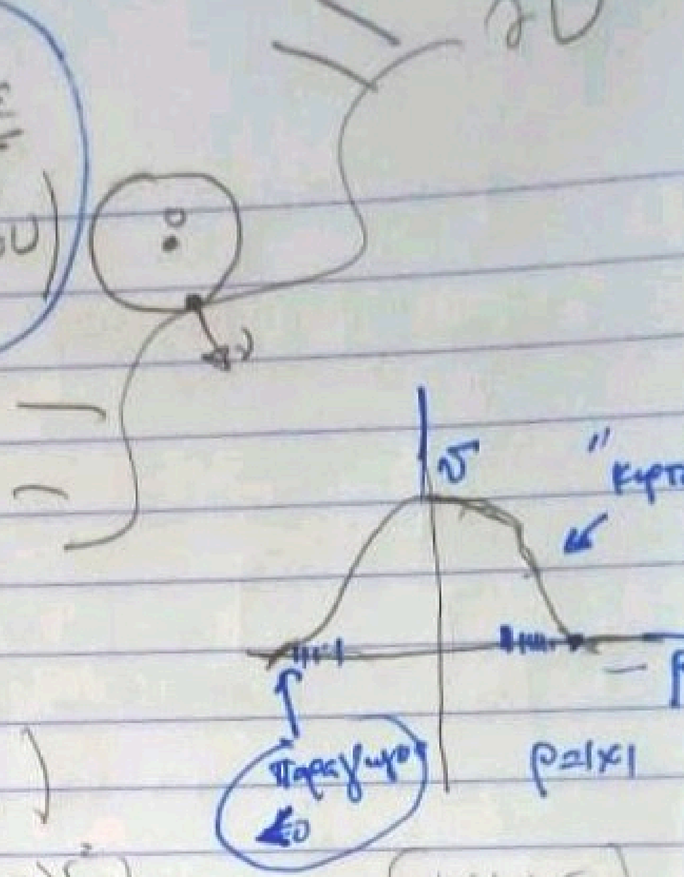
...ητικη Συναρτηση

φ εξαρτωνται ε (εξαρτωνται απο ∂U)

$B = B(0,r)$

$v(x) := e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}$, στο B

...ο, θα επιλεξει

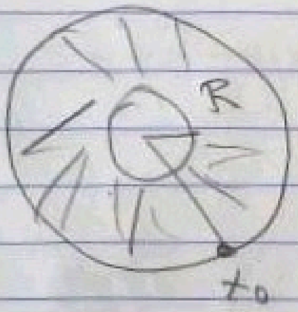


$$Lv = -a^{ij} v_{x_i x_j} + b^i v_{x_i} + c v$$

$$= e^{-\lambda|x|^2} a^{ij} \left(-4\lambda x_i x_j + 2\lambda \delta_{ij}\right)$$

$$- e^{-\lambda|x|^2} b^i 2\lambda x_i + c\left(e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}\right) \qquad (|x| \leq r)$$

$$\leq e^{-\lambda|x|^2}\left(-4\theta\lambda^2|x|^2 + 2\lambda \operatorname{tr} A + 2\lambda|b||x| + c\right)$$



$R = B(0,r) - B(0, r/2)$ = δακτυλιος

$\frac{r}{2} \leq |x| \leq r$

(3) $\quad Lv \leq e^{-\lambda|x|^2}\left(-\theta\lambda^2 r^2 + 2\lambda \operatorname{tr} A + 2\lambda|b|r + c\right) \leq 0$

$\boxed{\lambda \gg 1}$ (στο δακτυλιο)

($u(x_0) > u(x)$ στο U)

(ii) (1) $\Rightarrow$ συμπαγες

(4) $\boxed{1 \gg \varepsilon > 0}$ $\quad u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x) \quad (x \in \partial B(0, r/2))$

~~(ε μικρο)~~

Επανάληψη

(Επανάληψη της 21 με σημειώσεις)

Διάλεξη 21   Η Ισχυρή Αρχή των Μεγίστων (Hopf)

(Κάτω από τις υποθέσεις του Θ1, μέρος (i), σ137
+ U συνεκτικό

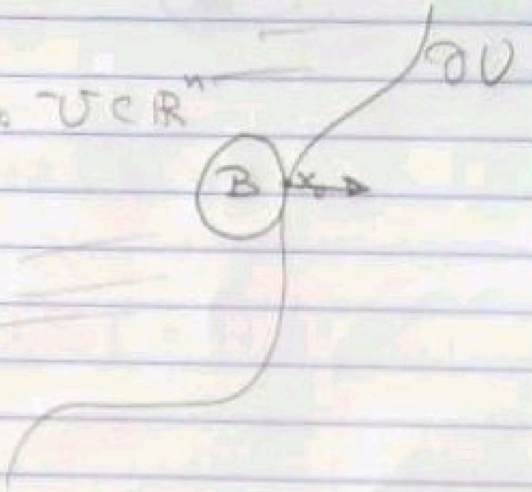
$$\max u = u(x_0), \quad x_0 \in U.$$

$\Rightarrow$

$$u \equiv \text{σταθερά}).$$

(ΜΔΕ - ΔΙΑΦ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

Το Λήμμα του Hopf



$u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$, $\quad c \equiv 0$ στο $U \subset \mathbb{R}^n$

$Lu \leq 0$ στο U

και $\exists\, x_0 \in \partial U$ τ.ω.

(1) $\quad u(x_0) > u(x), \quad x \in U.$

Έστω ∂U ικανοποιεί την ιδιότητα της "εσωτερικής μπάλας" στο x_0.

Ισχύει

(i) $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, ν μον. κάθετο στο ∂B, στο x_0

(ii) Για $c \geq 0$ επίσης ισχύει.

Παρατήρηση: $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$ τετριμμένο!

Επίσης

(5) $\quad u(x_0) \geq u(x) + \varepsilon v(x) \quad (x \in \partial B(0,r),\ v \equiv 0$ στο $)$

iii) $\quad$ (3) $\Rightarrow$

$$(6) \quad L(u + \varepsilon v - u(x_0)) \leq \overset{\leq 0}{Lu} + \varepsilon \overset{\leq 0}{Lv} - c\,u(x_0)$$

$$\leq -c\,u(x_0)$$

$$\leq 0 \quad \text{στον } R$$

(4), (5) $\Rightarrow$

$$u + \varepsilon v - u(x^0) \leq 0 \quad \text{στο } \partial R$$

Ασθενής Αρχή $\Rightarrow$

$$u + \varepsilon v - u(x^0) \leq 0 \quad \text{στο } R$$

$$u(x^0) + \varepsilon v(x^0) - u(x^0) = 0 \qquad (x^0 \ \max)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} + \varepsilon \frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} \geq -\varepsilon \frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu} = -\frac{\varepsilon}{r} \nabla v(x^0) \cdot x^0 = 2\lambda \varepsilon r e^{-\lambda r^2} > 0.$$

$\square$

<u>Πόρισμα</u> (Ισχυρή Αρχή του Μεγίστου)

Έστω $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$

$c \equiv 0$ στο U

U συνεκτικό

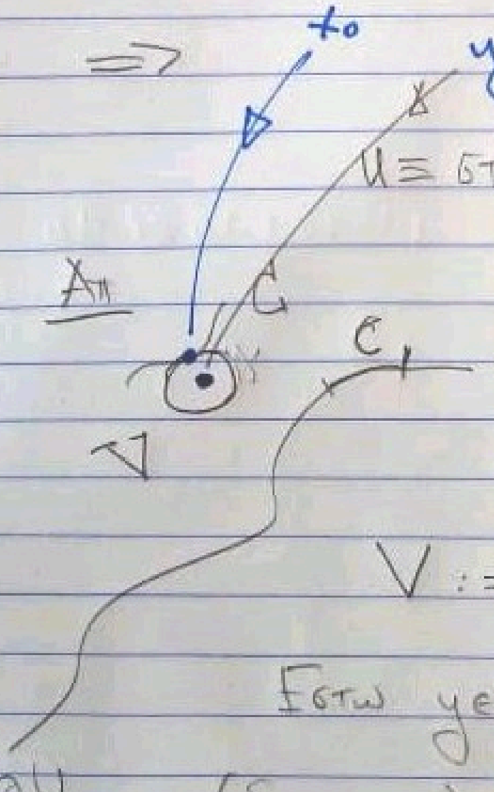
Αν

$Lu \leq 0$ $\qquad (-\Delta u \leq 0)$

και u λαμβάνει το $M = \max_{\bar{U}} u$ σε εσωτερικό σημείο

$\Longrightarrow$

$u \equiv$ σταθερά στο U



<u>Απ.</u>

κλειστό

$C := \{x \in U \mid u(x) = M\}$

Έστω $u \not\equiv M$ (δια άτοπου απαγωγή)

$V := \{x \in U \mid u(x) < M\} \neq \emptyset$, ανοικτό.

Έστω $y \in V$ τ.ω. $\mathrm{dist}(y, C) < \mathrm{dist}(y, \partial U)$

(διότι εξ υποθέσεως $C \not\subset \partial U$. Συνεκτικότητα;)

Θεωρούμε την μέγιστη μπάλα B κέντρου y, $B \subset V$.