Harnack

$$(*)\begin{cases} Lu = (a^{ij}u_{x_i})_{x_j} = 0, & a_{ij}\in L^\infty(U), \ \frac{1}{\lambda} \geq a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \\ \boxed{u>0} \text{ στο } U \end{cases}$$

Ασθενής λύση : $\int_U a^{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j}\,dx = 0$, u σε Sobolev χώρο.

U

Thm (Moser, 1961)

(0) $\sup_V u \leq C \inf_V u$, $V \subset\subset U$, $C = C(V,\lambda)$

$\iff \frac{1}{C} \leq \frac{u(x)}{u(y)} \leq C$, $x,y\in V$ (συγκρίσιμες)

Αρκεί : $B_{4r} \subset U$

(1) $\sup_{B_r} u \leq C \inf_{B_r} u$.

Προετοιμασία

A. $I(p,r) = \left(\fint_{B_r} u^p dx \right)^{1/p}$

$\sup_{B_r} u = \lim_{p\to+\infty} I(p,r)$, $\inf_{B_r} u = \lim_{p\to-\infty} I(p,r)$

$\boxed{\text{Άσκηση}}$

B. Θα αποδείξουμε ότι

(υπολύση) αν $(a^{ij}u_{x_i})_{x_j} \geq 0$ (ασθενώς, $\varphi\geq 0$) $\implies \sup_{B_{r/2}} u \leq C\, I(p,r)$, $\forall p>1$

(υπερλύση) αν $(a^{ij}u_{x_i})_{x_j} \leq 0$ $(-\shortparallel-)$ $\Rightarrow C \inf_{B_{r/2}} u \geq I(p,r)$, $1\leq p < \frac{n}{n-2}$

Προταση

- Αν $p > 1$, $Lu \geq 0$, R

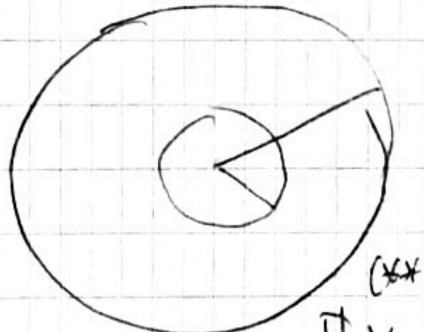
$$I\left(\frac{pn}{n-2}, R_1\right) \leq \left[\frac{CR_2^n}{(R_2-R_1)^2 R_1^{n-2}}\left(1+\frac{4p^2}{\lambda^4 |p-1|^2}\right)\right]^{1/p} I(p, R_2)$$

- Αν $p < 1$, $Lu \leq 0$

$$I\left(\frac{pn}{n-2}, R_1\right) \leq \left[\frac{CR_2^n}{(R_2-R_1)^2 R_1^{n-2}}\left(1+\frac{4p^2}{\lambda^4 |p-1|^2}\right)\right]^{1/p} I(p, R_2)$$

- Αν $p < 0$, $Lu \leq 0$

$$I\left(\frac{pn}{n-2}, r_1\right) \geq \left[\frac{CR_2^n}{(R_2-R_1)^2 R_1^{n-2}}\left(1+\frac{4p^2}{\lambda^4 |p-1|^2}\right)\right]^{1/p} I(p, R_2)$$



$R_2 > R_1$,

Ιδιοτητα τελεστη $L(u)$:

$\boxed{\text{Ανισοτητα Παρεμβολης}}$

$$(**) \quad \langle L(u), u^p \rangle \leq K_p \langle \Delta(u^{\frac{p+1}{2}}), u^{\frac{p+1}{2}} \rangle$$

<u>Π.χ.</u>: $L(u) = \Delta u$

$L(u) = \Delta u^m \quad (m > 1)$

$L(u) = \mathrm{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) \quad (m \geq 2)$

<u>Απ. Προτασης</u>

<u>Ιδεα 1</u> (Caccioppoli)

Εστω $L = \Delta$, και εστω $0 < p < 1$, και εστω $\Delta u \leq 0$.

η = συν. δοκιμης.

$$(2) \quad 0 \geq \int \Delta u \,(\eta^2 u^{p-1}) = -\int \nabla u \,\nabla(\eta^2 u^{p-1})$$

$$= -\int \nabla u \left[2\eta \nabla\eta\, u^{p-1} + \eta^2 (p-1) u^{p-2} \nabla u\right]$$

$$(p-1)\int |\nabla u|^2 u^{p-2}\eta^2 \geq 2\int \nabla u \nabla \eta\, \eta\, u^{p-1}$$

$$\int |\nabla u|^2 u^{p-2}\eta^2 \leq \frac{2}{1-p}\int \nabla u \nabla \eta\, \eta\, u^{p-1} \leq \frac{2}{|p-1|}\int |\nabla u||\nabla \eta|\eta\, u^{p-1}$$

$\Leftrightarrow$

$$\int |\nabla u|^2 u^{p-2}\eta^2 \leq \frac{2}{|p-1|}\int |\nabla u||\nabla \eta| u^{\frac{p-2}{2}} u^{\frac{p}{2}}\eta$$

$$\leq \frac{2}{|p-1|}\left[\int \varepsilon |\nabla u|^2 u^{p-2}\eta^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int |\nabla \eta|^2 u^p\right]$$

$$\frac{2\varepsilon}{|1-p|} = \frac{1}{2}$$

(3) $$\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 u^{p-2}\eta^2 \leq \frac{16}{|p-1|^2}\int |\nabla \eta|^2 u^p.$$

Επιλογή η : $\eta \equiv 1$ στο B_{R_1}, $\eta \equiv 0$ στο $B_{R_2}^C$

$$\Rightarrow \quad |\nabla \eta| \leq \frac{C}{R_2 - R_1}$$

(4) $$\int_{B_{R_2}} |\nabla u|^2 u^{p-2}\eta^2 \leq \frac{16}{|p-1|^2}\frac{1}{(R_2-R_1)^2}\int_{B_{R_2}} u^p.$$

<u>Σημ</u> : Η (4) ισχύει και για $p>1$ για $\Delta u \geq 0$.

<u>Ιδέα 2</u> : (Ανισότητα Παρεμβολής (**))

$$\int \Delta u\, u^q = -\frac{q}{\left(\frac{q+1}{2}\right)^2}\int |\nabla (u^{q/2})|^2 \qquad \left(\text{π.χ. } u\big|_{\partial} = 0\right)$$

$\therefore$

$$\int_{B_{R_2}} |\nabla u|^2 \eta^2 u^{p-2} \leq \frac{16}{|p-1|^2} \frac{\lambda}{(R_2-R_1)^2} \int_{B_{R_2}} u^p$$

$\therefore$

$$C \int_{B_{R_2}} |\nabla (\eta u^{p/2})|^2 \geq \left(\int_{B_{R_2}} |\eta u^{\frac{p}{2}}|^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}}$$

Sobolev

Παρατηρηση

$$\frac{p}{2} \frac{2n}{n-2} = \frac{n}{n-2} p > p \quad !$$

$\therefore$

$$(5) \quad \left(\int_{B_{R_1}} u^{\frac{pn}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \frac{C}{(R_2-R_1)^2} \left(\lambda + \frac{4p^2}{|p-1|^2} \right) \int_{B_{R_2}} u^p$$

Παρατηρηση.

Για την L κανοντας χρηση της ελλειπτικοτητας καταληγουμε στο ιδιο αποτελεσμα:

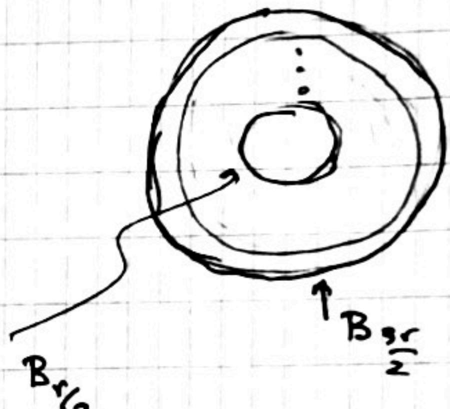
$$(6) \begin{cases} I\left(\frac{pn}{n-2}, R_1\right) \leq \left[\dfrac{C R_2^n}{(R_2-R_1)^2 R_1^{n-2}} \left(1 + \dfrac{4p^2}{\lambda^4 |p-1|^2} \right) \right]^{\frac{1}{p}} I(p, R_2), \quad p>0 \\[2ex] I\left(\frac{pn}{n-2}, R_1\right) \geq \left[\dfrac{C R_2^n}{(R_2-R_1)^2 R_1^{n-2}} \left(1 + \dfrac{4p^2}{\lambda^4 |p-1|^2} \right) \right]^{1/p} I(p, R_2), \quad p<0 \end{cases}$$

Σημ. Για $p<0$ αν παρουμε την ρίζα $\frac{1}{p}$ αντιστρέφεται η ανισότητα. □

Έστω $\gamma = \frac{n}{n-2}$, $p>1$, $Lu \geq 0$

Επιλέγουμε

$$(7) \quad \begin{cases} p_k = \gamma^k p, \quad r_k = \frac{r}{2} + \frac{r}{2^k} & k=0,1,2, \\ r_0 = \frac{3r}{2}, \quad r_\infty = \frac{r}{2} & r_k \downarrow \end{cases}$$



$$I(p_{k+1}, r_{k+1}) \leq \left[C(n,\lambda)\, 2^k\right]^{\frac{1}{p_k}} I(p_k, r_k)$$

$\therefore$

$$(8) \quad \sup_{B_{r/2}} u \leq \lim_{k\to+\infty} I(p_k, r_k) \leq C(n,\lambda)^{\sum_0^\infty \frac{k}{p_k}} I\left(p, \tfrac{3}{2} r\right) \leq C(n,\lambda,p)\, I\left(p, \tfrac{3}{2} r\right)$$

Έστω $Lu \leq 0$,

Επιλέγουμε

$$p_k = p\gamma^{-k}, \quad r_k = 2r - \frac{r}{2^k}, \quad k=0,1,\dots,N$$

$$r_k \uparrow \qquad r_0 = r < \dots < r_N$$

$$I(p_k, r_k) \leq \left[C(n,\lambda)\, 2^k\right]^{\frac{1}{p_{k+1}}} I(p_{k+1}, r_{k+1}), \quad 0 \leq k \leq N$$

$\therefore$

$$(9) \quad I(p,r) \leq \left(C(n,\lambda)\right)^{Q_1} I(p\gamma^{-N}, r_N), \quad Q_1 = \sum_0^{N-1} \frac{k}{p_{k+1}}$$

Σημ: Χρειαζόμαστε την περίπτωση "σε $p<1$" όταν $Lu \leq 0$
$\Rightarrow p\gamma^{-1} < 1 \Leftrightarrow p<\gamma$.

Παρομοια

(10) $$I\left(-\infty, \frac{r}{2}\right) \geq C^{Q_2} I(-p_N, r_N)$$

$$Q_2 = \sum_{0}^{\infty} \frac{-k}{p_N \gamma^k} < +\infty.$$

Αρκεί να δείξουμε για κάποιο N ότι

(11) $$I(p_N, r_N) \leq C_1 I(-p_N, r_N).$$

Θα παρουμε δεδομένο το

<u>Λημμα</u> (John + Nirenberg 1961)

Εστω $u \in W^{1,1}(\Omega)$, Ω κυρτο, και εστω $\exists K>0$

$$\int_{\Omega\cap B_r} |\nabla u|\,dy \leq K r^{n-1}, \quad \forall B_r \subset \Omega$$

$$\Rightarrow \int_\Omega e^{\frac{\sigma}{K}|u-u_\Omega|} \leq C(\mathrm{diam}\,\Omega)^n$$

$$\sigma = \sigma_0 |\Omega| (\mathrm{diam}\,\Omega)^{-n}$$

Κάνοντας χρήση αυτών θα αποδείξουμε ότι

αν $u > 0$, $Lu < 0$

<u>Λήμμα</u>

$\exists\ p_0 > 0,\ C$ τ.ω.

$$I(p_0, r) \leq C\, I(-p_0, r)$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_{B_r} u^{p_0}\right)^{1/p_0} \leq C\left(\int_{B_r} u^{-p_0}\right)^{-1/p_0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_{B_r} u^{p_0}\right)\left(\int_{B_r} u^{-p_0}\right) \leq C.$$