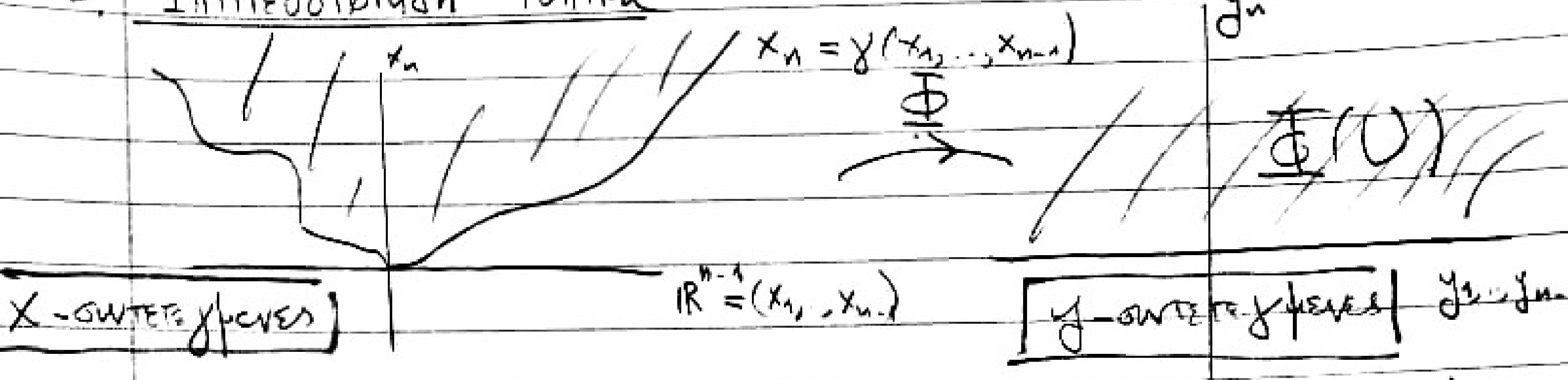
Β. Επιπεδοποιηση τοπικα



Φ αμφιδιαφοριση (τοπικα) $\qquad \Phi : B(x^0, r) \to B(0, \hat{r})$

$$\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n) \quad , \det\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x_j}(x^0)\right) \neq 0$$

$$(1) \begin{cases} y_n = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) =: \Phi^n(x_1, \dots, x_n) \\ y_i = x_i =: \Phi^i(x_1, \dots, x_n) \quad , i = 1, \dots, n-1 . \end{cases}$$

Προφανως $\{x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\} = \{y_n = 0\}$.

$$(2) \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \nabla \Phi^1 \\ \nabla \Phi^2 \\ \vdots \\ \nabla \Phi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \gamma}{\partial x_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

Πανω τριγωνικος

$$\det\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial x_j}\right) = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

Παρατηρηση

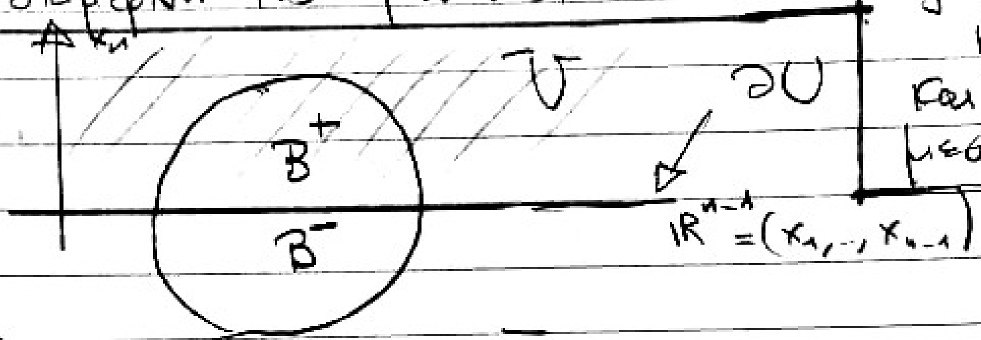
$$(3) \begin{cases} x_i = y_i =: \Psi^i(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}) =: \Psi^n(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

$\boxed{\text{αντιστροφος}}$

Απόδειξη Θεωρήματος 1

Στρατηγική: Υποθέτουμε αρχικά ∂U τοπικά επιπεδοποιημένο, ορίζουμε τον τελεστή E, και στην συνέχεια επιπεδοποιούμε και καλύπτουμε όλο το ∂U με μια διαμέριση της μονάδος. Επίσης θα δουλέψουμε με $u \in C^1(\overline{U})$ και θα πάμε μέσω πυκνότητας.

1.



$$B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \overline{U}$$

$$B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n - \overline{U}$$

2.

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in B^+ \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right), & \text{για } x \in B^- \end{cases}$$

3. Τσεκάρουμε ότι $\bar{u} \in C^1(B)$

- συνέχεια: $\bar{u}(\xi, 0) = -3u(\xi, 0) + 4u(\xi, 0)$
- Παράγωγοι: $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i}(\xi, 0) = -3\dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}(\xi, 0) + 4\dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}(\xi, 0)$, $i = 1, \dots, n-1$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n}(\xi, 0) = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}(\xi, 0) - \frac{4}{2}\frac{\partial u}{\partial x_n}(\xi, 0)$$

Ισχύει $\bar{u} \in C^1(B)$.

4. (5) $\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = -3\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(\xi, -x_n) + 4\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(\xi, -\frac{x_n}{2}) & , i=1,\dots,n-1 \quad x \in B^- \\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} = +3\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(\xi, -x_n) - 2\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(\xi, -\frac{x_n}{2}) \end{cases}$

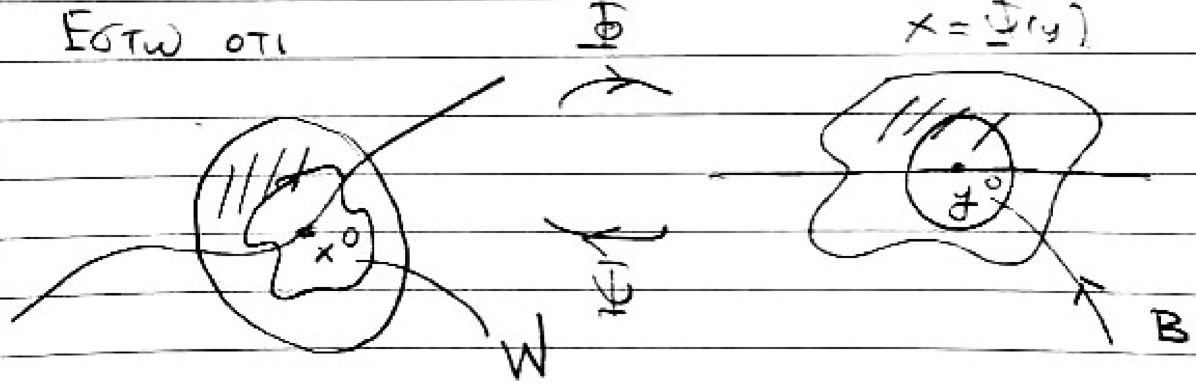
$\Longrightarrow$

(6) $$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$$

C ανεξάρτητο της u.

5. Έστω ότι

$y = \Phi(x)$
$x = \Psi(y)$



$u(x) = u(\Psi(y)) =: u'(y)$ $\qquad W := \Psi(B)$

$$\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}$$

$\Longleftrightarrow$

(7) $$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

$\left(\dfrac{\partial u'}{\partial y_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \dfrac{\partial \psi^j}{\partial y_i} \right.$, $\underset{y}{D} u' = (D_x u)(D_y \Psi)$

Αντιστρεψιμότητα: $D_x u = \dots$

6. ∂U συμπαγές, $x_1^0, \ldots, x_N^0$

$\partial U \subset \bigcup_{i=1}^{N} W_i$, $\bar{u}_i$: επέκταση στο W_i

Περιγράφουμε και την "τρύπα" με κάποιο $W_0 \subset\subset U$

έτσι ώστε

(8) $$\bar{U} \subset \bigcup_{i=0}^{N} W_i$$

και θεωρούμε διαμέριση της μονάδος $\{\zeta_i\}_{i=0}^{N} \leftrightarrow \{W_i\}$

και ορίζουμε $\bar{u}_0 = u$ και επίσης

(9) $$\bar{u} := \sum_{i=0}^{N} \zeta_i \bar{u}_i$$

$$\left(\begin{array}{l} \bar{u}(x) = \sum \zeta_i(x)\bar{u}_i(x) \\ x \in U \Rightarrow \bar{u}_i(x) = u(x), \quad \sum \zeta_i(x) u(x) = u(x) \end{array} \right).$$

Επίσης μπορούμε να κανονίσουμε μέσω των ζ_i ώστε $spt\, \bar{u} \subset\subset V$.

7. (Coda)

Έστω $1 \le p < \infty$.

Δοθείσης $u \in W^{1,p}(U)$ $\exists$ $u_m \in C^1(\bar{U})$ τ.ω.

(10) $$u_m \xrightarrow{W^{1,p}(U)} u$$

E επεκτείνεται μέσω πυκνότητος (γενική συνάρτησ

$$\|Eu_m - Eu_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(U)}$$

$\Rightarrow \{Eu_m\}$ Cauchy

$\Rightarrow$

(ii) $$Eu := \lim_{n\to\infty} Eu_n$$

Ανεξαρτησία από την $\{u_m\}$ (γιατί;)

$\square$

Ερώτημα - Άσκηση 9

Αποδείξτε το Θεώρημα 1 για $p=\infty$.

$\#$

Διάλεξη 7 — Επεκτάσεις $E: W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

(H) Υποθέσεις : $U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένο, $\partial U \in C^1$, $1 \le p \le \infty$

(E γραμμικός, φραγμένος $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$ (*)

$\exists\, C > 0$, (*) ισχύει $\forall u$, $C = C(p, n, U)$

$v(x) = (Eu)(x)$, $v\big|_U = u$ a.e. $x \in U$).

Θεώρημα 1

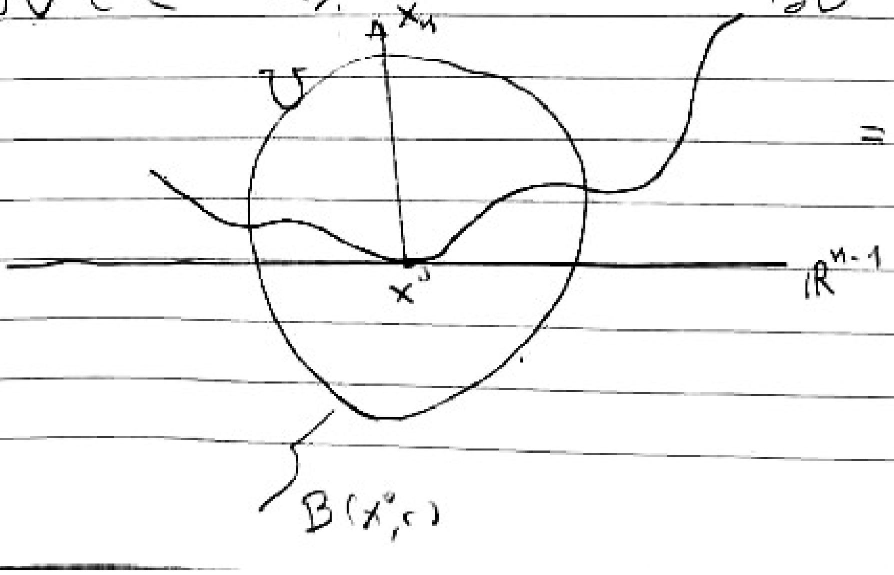
Κάτω από τις υποθέσεις (H), και δοθέντος $V \supset\supset U$ V ανοικτού, φραγμένου, $\exists\, E$ όπως στην (*) και επίσης

$$\operatorname{spt} Eu \subset V.$$

Η σταθερά C εξαρτάται εν γένει και από το V.

Σημείωση

A. $\partial U \in C^1 \Rightarrow$



$U \cap B(x^0, r) = \{x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$

γ C^1.