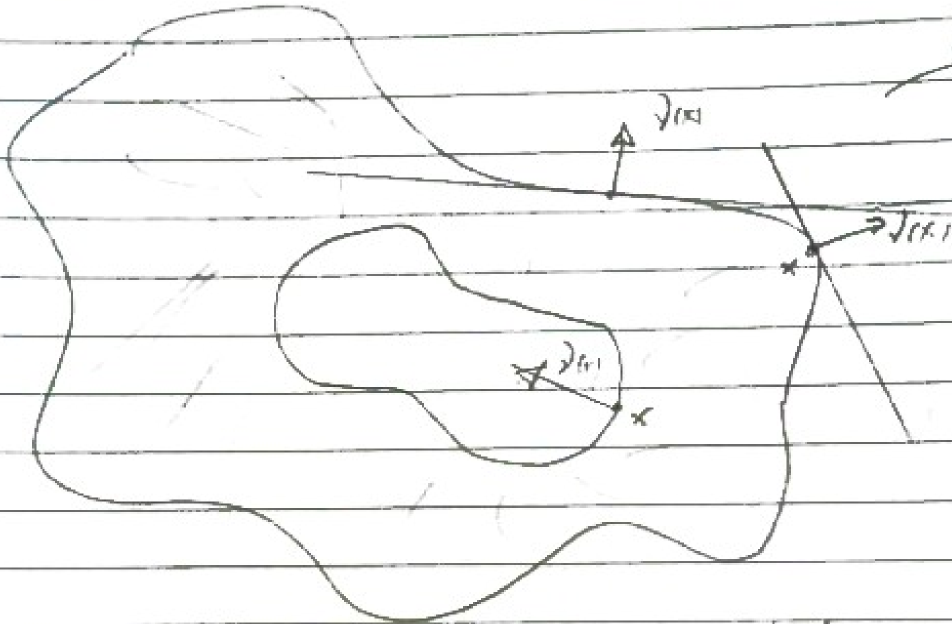
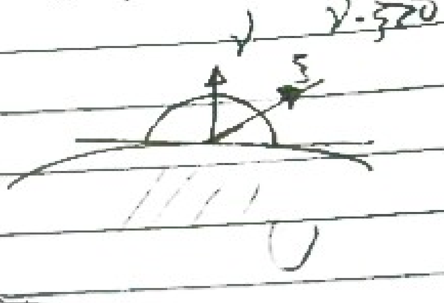
Σημ.

1. Η προσανατολισιμότητα σημαίνει ότι $\exists$ C^1 διανυσματικό πεδίο $\nu(x)$, $x \in \partial U$, κάθετο στο ∂U σε $\forall x$, και κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του U,

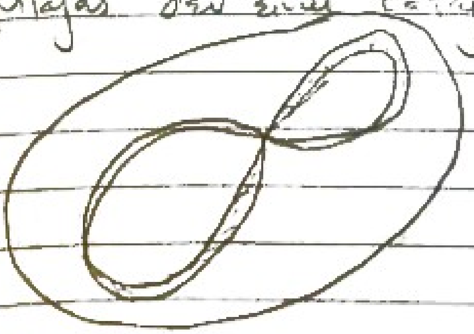




δηλ. $\nu(x) \cdot \xi > 0$ τοπικά, για $\xi \notin U$.

Η ιδιότητα C^1 του ∂U είναι τοπική. Η προσανατολισιμότητα είναι ολική.

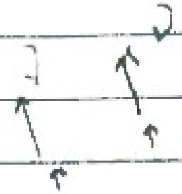
Π.χ. το συμπλήρωμα ενός Möbius strip εντός μιας μπάλας δεν είναι τέτοιο U.

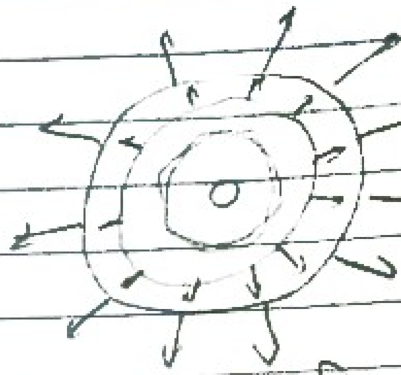


2. Η (1) ισχύει και χωρίς την υπόθεση της προσανατολισιμότητας (Η απόδειξη των βημάτων που είναι τοπικά και χωρίς χρήση της διατήρησης της μονάδος).

Απόδειξη της (1)

Θεωρούμε μια $C^1(\bar{U})$ επέκταση του Δ.Π. $\vec{\nu}$ εντός του U





που καλούμε $\vec{V}(x)$. Το Θεώρημα της Απόκλισης δίνει

(2) $$\int_U \mathrm{div}(\vec{V}|u|^p)\,dy = \int_{\partial U} |u|^p\, \vec{V}\cdot\vec{\nu}\, dS = \int_{\partial U} |u|^p\, dS$$

$$\vec{V} = (v_1(x), \dots, v_n(x))$$

(3) $$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i(x)|u|^p\right) =$$

$$\hat{C} = \max_{\bar{U}, i}\left(v_i(x)\,p,\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)$$

$$v_i(x)\, p|u|^{p-2} u\, u_{x_i} + \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}|u|^p \le \hat{C}\left(|u|^{p-1}|\nabla u| + |u|^p\right)$$

(x) Young: $|ab| \le \frac{1}{\bar{p}}|a|^{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}}|b|^{\bar{q}}$ $\qquad \frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}} = 1$ (συζυγείς εκθέτες) $\bar{p} > 1,\ \bar{q} > 1$

Για $p=1$ η (1) προκύπτει από την (3).
Έστω $p>1$. Επιλέγουμε $\bar{p}$ τ.ω.

(4) $$\begin{cases} \bar{p}(p-1) = p \iff \bar{p} = \dfrac{p}{p-1} \\ \dfrac{1}{\bar{q}} = 1 - \dfrac{p-1}{p} = \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

Συνεπώς (3) μέσω (*), $p>1$, (4) δίνει:

(5) $$|u|^{p-1}|\nabla u| \le \frac{1}{p}|u|^{\frac{p}{p-1}(p-1)} + \frac{1}{q}|\nabla u|^{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{p-1}{p}|u|^{p} + \frac{1}{p}|\nabla u|^{p},$$

$$\Longrightarrow (1).$$

2. Ορίζουμε τώρα

(6) $$Tu = u\big|_{\partial U} \quad \text{για } W^{1,p}(U)\cap C^{1}(\bar U)$$

Από (1) έχουμε

(7) $$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Ο T είναι γραμμικός και φραγμένος σε πυκνό σύνολο $C^1(\bar U)\cap W^{1,p}(U)$ στο $W^{1,p}(U)$. Μέσω πυκνότητας λοιπόν επεκτείνεται η (7) στο $W^{1,p}(U)$.

(Λεπτομέρειες Γενικής Αρχής Επέκτασης Γραμμικών Τελεστών Μέσω Πυκνότητας:
$\mathbb{X}$ = B-χώρος, $D = \bar{\mathbb{X}}$

(8) $T: D \to \mathbb{X}$, $\|Tx\| \le C\|x\|$, $x \in D$.

Έστω $x \in \bar{X}$, και έστω $\{x_n\} \subset D$, $x_n \longrightarrow x$

Ορίζουμε

(9) $$Tx = \lim Tx_n$$

Πρώτον το όριο $\exists$ στην (9):

(10) $$\|Tx_n - Tx_m\| \overset{(8)}{\leq} C\,\|x_n - x_m\|$$

$\{x_n\}$ Cauchy (βασική) διότι συγκλίνει,

$\overset{(10)}{\Rightarrow} \{Tx_n\}$ —//—

$\Rightarrow$ Το όριο στην (9) $\exists$.

Τέλος θα δείξουμε ότι το όριο στην (9) δεν εξαρτάται από την ακολουθία $\{x_n\}$.

Έστω $\{x_n'\} \subset D$, $x_n' \longrightarrow x$

(11) $$\|Tx_n - Tx_n'\| \overset{(8)}{\leq} C\,\|x_n - x_n'\| \longrightarrow 0$$ (συγκλίνουν στο ίδιο όριο!).

Η (9) επεκτείνει μοναδικά τον τελεστή T. $\square$

συμπαγές

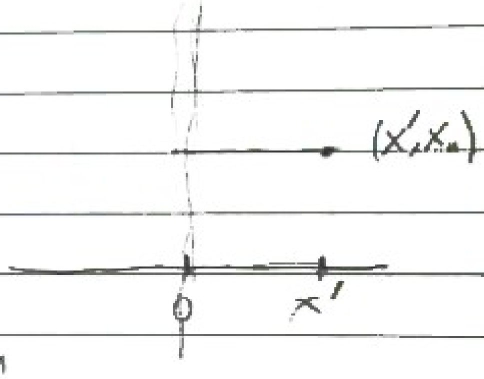
$$\begin{cases} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+), \quad \overline{\operatorname{spt} u} \subset \overline{\mathbb{R}}^n_+ \\ \underline{\text{και}} \quad Tu = 0 \text{ στο } \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

$\exists\ u_m \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ τ.ω.

(15) $$u_m \xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} u$$

$\Rightarrow$

(*) $$Tu_m = u_m\Big|_{\mathbb{R}^{n-1}} \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} 0$$



Για $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \geq 0$

$$|u_m(x', x_n)| \leq |u_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x', t)|\, dt.$$

$p>1$

$$|u_m(x', x_n)|^p \leq C\left(|u_m(x', 0)|^p + \left(\int_0^{x_n} |u_{m,x_n}(x', t)|\, dt\right)^p\right)$$

$\Rightarrow$

(16) $$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)|^p dx' \overset{\text{Holder}}{\leq} C\left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p dx' + x_n^{p-1}\int_0^{x_n}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u|^p dx'\right) dt\right]$$

$m \to \infty$, λόγω (*)

<u>Θεώρημα 1</u>

U φραγμένο, $\partial U \in C^1$, $u \in W^{1,p}(U)$.

Υπενθυμίζουμε ότι

$$W_0^{1,p}(U) = \overline{C_c^1(U)}^{\,W^{1,p}\text{ νόρμα}}$$

(12) $$u \in W_0^{1,p}(U) \iff Tu = 0$$

<u>Απόδειξη</u>

1. $(\Longrightarrow)$

Έστω $u \in W_0^{1,p}(U) \Longrightarrow \exists\ u_n \in C_c^1(U)$ τ.ω.

(13) $$u_n \xrightarrow{W^{1,p}(U)} u$$

$\Longrightarrow$

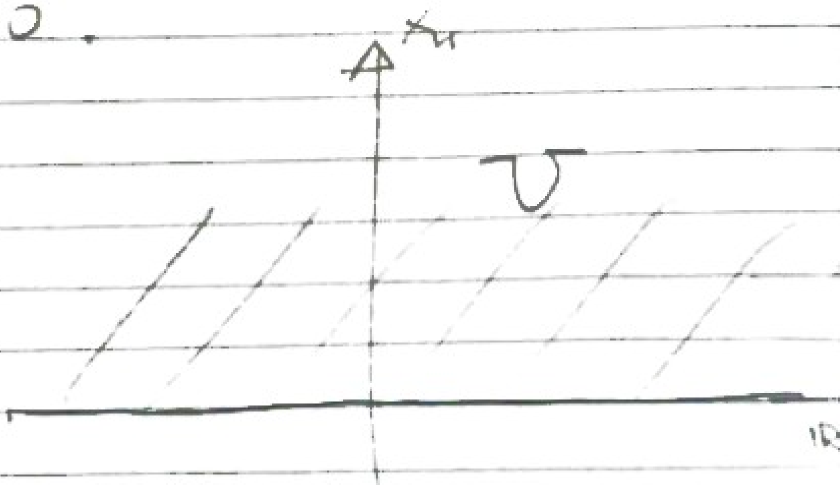
(14) $$Tu_n \xrightarrow{L^p} Tu$$

$$Tu_n = u_n\Big|_{\partial U} = 0$$

ά. $$Tu = 0.$$

2. $(\Longleftarrow)$

Θα υποθέσουμε ότι



(17) $$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',x_n)|^p \, dx' \le C x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u|^p \, dx' \, dt$$

$$\forall \; x_n \ge 0$$

3. Θέλαμε τώρα να κατασκευάσουμε ακολουθία

$$\{w_m\} \subset C^1_c(\mathbb{R}^n_+)$$

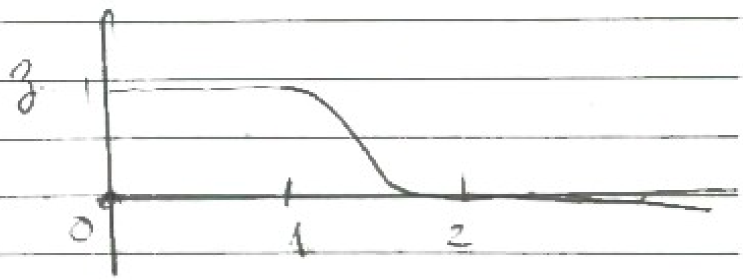
τ.ω.

(18) $$w_m \xrightarrow{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} u$$

Συνάρτηση Αποκοπής

Έστω

$$\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+) \; ,$$



- $0 \le \zeta \le 1$

(19) $$\begin{cases} \zeta_m(x) := \zeta(m x_n) \, , \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \\ w_m(x) := u(x)\left(1 - \zeta_m(x)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_m}{\partial x_n} = \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\left(1 - \zeta_m(x)\right) - m u \zeta' \\ \nabla_{x'} w_m = \left(\nabla_{x'} u\right)\left(1 - \zeta_m\right) \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla w_m - \nabla u|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla_{x'} w_m - \nabla_{x'} u|^p dx$$

$$+ C \int_{\mathbb{R}^n_+} \left| \frac{\partial w_m}{\partial x_n} - \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p dx$$

$$= I + II$$

$$|\nabla_{x'} w_m - \nabla_{x'} u|^p = |\nabla_{x'} u \,[1 - \zeta_m - 1]|^p$$

$$\leq |\nabla_{x'} u|^p |\zeta_m|^p$$

$$\zeta_m \neq 0 \Leftrightarrow x_n \in \left(0, \frac{2}{m}\right)$$

$$\int_0^{2/m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla_{x'} u|^p \, dx' \right) dx_n \longrightarrow 0$$

$$\left(\int_0^A \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla_{x'} u|^p \, dx \leq C \right). \quad (;;).$$

Συνεπώς $\quad I \to 0.$

$$II \leq C\, m^p \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|$$

Διάλεξη 8 Ίχνος Συναρτήσεων Sobolev $(1 \le p < \infty)$

Θεώρημα 1

$U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο, $\partial U \in C^1$

$\exists$ T, γραμμικός, φραγμένος

$$T: W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

δηλ.

$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(U)} .$$

Επίσης

$$Tu = u\big|_{\partial U} \quad \text{για} \quad u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U}).$$

#

Άσκηση 10 (Ασ 8 Evans)

$\nexists$ τελεστής ίχνους $T: L^p(U) \to L^p(\partial U)$

#

Απόδειξη Θεωρήματος 1 (για προσανατολισμένο ∂U)

1. Θα αποδείξουμε ότι [το ∂U είναι] προσανατολισμένο, τότε για $u \in C^1(\bar{U})$ ισχύει η εκτίμηση

(1) $$\int_{\partial U} |u|^p dS \le C' \int_U (|\nabla u|^p + |u|^p) dx$$

όπου $C' > 0$ σταθερά ανεξάρτητη της u.