Στο $x_0 = 0$:

$$(1)\quad a^{ij}(0)\, u_{x_i x_j}(0) = a^{ij} u_{y_k y_l} O_{ki} O_{lj}$$

$$= \lambda_k u_{y_k y_k}$$

$$\leq 0.$$

$$\left(tr\, \partial^2 u(0) \leq 0, \quad \lambda_k > 0 \right).$$

3. Στο $x_0 = 0$

$$(2)\quad Lu = -a^{ij} u_{x_i x_j} + \cancel{b^i u_{x_i}} > 0 \quad \text{(υπόθεση)}$$

$$(1) \cancel{\leq} (2)$$

Άρα $x_0 \in \partial U$.

4. Έστω $Lu \leq 0$

$$u^\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}, \quad \lambda, \varepsilon > 0, \text{ θα επιλεγούν.}$$

$$Lu^\varepsilon = Lu + \varepsilon L(e^{\lambda x_1})$$

$$\leq \varepsilon L(e^{\lambda x_1}) = \varepsilon e^{\lambda x_1} \left[-\lambda^2 a^{11} + \lambda b^1 \right]$$

$$\leq \varepsilon e^{\lambda x_1} \left[-\lambda^2 \theta + \|b\|_\infty \lambda \right] \quad (a_{11}(x) \geq \theta)$$

$$< 0.$$

Απόδειξη

1. Έστω $Lu < 0$ στο U

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u .$$

Έστω $x_0 \in U$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \nabla u(x_0) = 0 \\ \partial^2 u(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

2. $A := (a^{ij}(x_0))$, συμμετρικά, γνησίως θετικός ορ. πίνακ

$$OAO^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i > 0, \ i = 1, \dots, n$$

$$OO^T = O^T O = I$$

Χ.β.γ. υποθέτουμε ότι $x_0 = 0$

Αλλαγή Μεταβλητών: $y = Ox$, $x = O^T y$

$O = (o_{kl})$, $O^T = (o_{lk})$, $y_k = o_{kl} x_l$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = u_{y_k} o_{ki}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_{y_k} o_{ki}\right) = \frac{\partial}{\partial y_l}\left(u_{y_k} o_{ki}\right) \frac{\partial y_l}{\partial x_j}$$

$$= u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj} .$$

Αρχές Μεγίστου

Χαρακτηριστικός: <u>Τοπικό</u> Μέγιστο στο x_0

$$\nabla u(x_0) = 0 \ , \quad \left(\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \leq 0 \quad \text{(αρνητικά ορισμένη)}$$

<u>Hessian</u> $= (u_{x_i x_j})$
$= \partial^2 u$

$$Lu := - a^{ij} u_{x_i x_j} + b^i u_{x_i} + cu$$

$a^{ij}, b^i, c \in C(\bar{U})$, $a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta \, \xi_i \xi_i$,

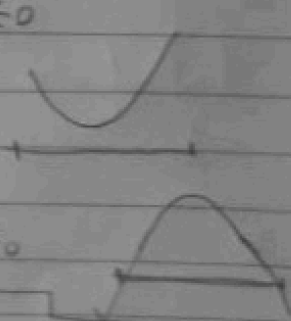
$\theta =$ θετική σταθερά
$\forall \ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

<u>Ασθενής Αρχή Μεγίστου</u>

U ανοικτό, φραγμένο, στο $\mathbb{R}^n$

Μνημονικός Κανόνας

$Lu = -u'' \leq 0$



$Lu = -u'' \leq 0$

(υπολύση)

<u>Θ1</u>
Έστω $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$
Έστω $c \equiv 0$

(i) Αν $Lu \leq 0$ στο U
$\Longrightarrow$

$$\max_{U} u = \max_{\partial U} u$$

(ii) $Lu \geq 0$ στο U (υπερλύση)
$\Longrightarrow \min_U u = \min_{\partial U} u$

Δηλαδή χ.β.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι

(10) $\|u_k\|_{L^2} = 1$, και $f_k \longrightarrow 0$ στο $L^2(U)$

(11) $Lu_k = \lambda u_k + f_k$

$(L+\gamma I)u_k = (\lambda+\gamma)u_k + f_k$

$((L+\gamma I)u_k, u_k) = (\lambda+\gamma)\|u_k\|^2 + (f_k, u_k)$

$\leq \lambda+\gamma + \|f_k\|\,\|u_k\|$

$((L+\gamma I)u_k, u_k) \geq \beta \|u_k\|^2_{H^1_0}$

$\therefore \quad \|u_k\|_{H^1_0} < C$

$\exists$ υπακολουθία

$$\begin{cases} u_{k_j} \xrightarrow{w} u \text{ στον } H^1_0(U) \Rightarrow u_{k_j} \longrightarrow u \text{ στο } L^2(U) \\ u \end{cases}$$

(11) $\Rightarrow$

(12) $Lu = \lambda u$, $\|u\|_{L^2} = 1$

$u\big|_{\partial U} = 0$

$\underline{\lambda \in \Sigma}$ $\cancel{\emptyset}$.

□

Θεώρημα $(L-\lambda I)^{-1}$

Έστω $\lambda \notin \Sigma$. Τότε υπάρχει C τ.ω.

$$(6) \qquad \|u\|_{L^2(U)} \leq C \|f\|_{L^2(U)}$$

$$(7) \quad \begin{cases} (L-\lambda I)u = f & , \text{στο } U \quad , f \in L^2(U). \\ u\big|_{\partial U} = 0 \end{cases}$$

$$C = C(\lambda, a^{ij}, b^j, c)$$

Απόδειξη

Με εις άτοπον απαγωγή:

$\exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(U)$, $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H_0^1(U)$

$$(8) \quad \begin{cases} Lu_k = \lambda u_k + f_k & , \text{στο } U \\ u_k = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

και

$$(9) \qquad \|u_k\|_{L^2(U)} > k \|f_k\|_{L^2(U)} \quad , k = 1, 2, \dots$$

Θεωρούμε την $v_k = \dfrac{u_k}{\|u_k\|_{L^2}}$, που ικανοποιεί

$$\boxed{Lv_k} = \lambda v_k + \frac{f_k}{\|u_k\|_{L^2}} =: \boxed{\lambda v_k + g_k}$$

$$\|v_k\|_{L^2} = 1, \quad \|g_k\|_{L^2} = \frac{\|f_k\|_{L^2}}{\|u_k\|_{L^2}} < \frac{1}{k} \longrightarrow 0$$

Το (3) $\Leftrightarrow$

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma+\lambda)u = \frac{\gamma+\lambda}{\gamma} K u$$

$(K u := \gamma L_\gamma^{-1} u)$.

Υπενθυμίζουμε ότι

$$K : L^2(U) \to L^2(U) \quad \text{, συμπαγής}$$

Συνεπώς

$u \equiv 0$ η μόνη λύση της (4) $\Leftrightarrow$

(5) $\quad \frac{\gamma}{\gamma+\lambda}$ δεν είναι ιδιοτιμή του K

$\therefore$ Το Π.Σ.Τ. (1) έχει μοναδική λύση $\forall f \in L^2(U)$

$\Leftrightarrow$ η (5) ισχύει

3. Γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του K ή είναι πεπερασμένο σύνολο, ή άπειρο $\to 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma}{\gamma+\lambda_k} \to 0 \Leftrightarrow |\lambda_k| \to +\infty$$

Σημείωση: Το $Lu + \mu u = f$ έχει πάντα λύση για $\mu \geq \gamma$ (από Θεώρημα Ι, 6.1.2)

Άρα $\lambda \in \Sigma \Rightarrow \lambda \geq -\gamma \Rightarrow \lambda_k \to +\infty$.

$\square$

έχει μοναδική λύση $\forall f \in L^2(U) \iff \lambda \notin \Sigma$.

(iii) Αν $\operatorname{card} \Sigma = \infty$, $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\underset{\uparrow}{\lambda_1 <} \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \ldots \leq \lambda_n \longrightarrow +\infty$$

αυστηρή ανισότητα (Krein-Rutman).

Απόδειξη

1. Έστω γ η σταθερά στην απόδειξη του Θ II (σ. 130) και έστω

(2) $$\lambda > -\gamma$$

Χ.β.γ. υποθέτουμε ότι $\gamma > 0$.

2. Από Fredholm Alternative το (1) έχει λύση μοναδική $\forall f \in L^2(U) \iff$

$$\left.\begin{array}{l} Lu - \lambda u = 0 \\ u|_{\partial U} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u \equiv 0.$$

$\iff$

$$\left.\begin{array}{l} Lu = \lambda u \\ u|_{\partial U} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u \equiv 0$$

$\iff$

(3) $$\left\{\begin{array}{l} Lu + \gamma u = (\gamma + \lambda) u \\ u|_{\partial U} = 0 \end{array}\right.$$

Διαλεξη 20 : Το 3' Θεωρημα Υπαρξης Ασθενων Λυσεων. Η Αρχη του Μεγιστου

I) Ορισμος Φασματος

Εστω $Lu = -\frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij} u_{x_j}) + b^i u_{x_i} + cu$

$a^{ij}, b^i, c \in C^1(\bar{U})$, U ανοικτο φραγμενο

Ο τελεστης Laplace : $\Delta u = u_{x_i x_i}$ $(L = -\Delta)$

$(a^{ij} = \delta_{ij}, b^i = 0, c = 0)$ ειδικη περιπτωση.

ΕVP) $\begin{cases} L\varphi = \lambda\varphi, & \text{στο } U \\ \varphi\big|_{\partial U} = 0 \end{cases}$

$\varphi \not\equiv 0$ ιδιοσυναρτησεις

λ αντιστοιχες ιδιοτιμες.

Σ = φασμα τελεστη

Εν γενει οι ιδιοτιμες ειναι στο $\mathbb{C}$. Στην περιπτωση που $L = L^*$ τοτε $\Sigma \subset \mathbb{R}$, Ειδικα $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$ εχει προσθετικες ιδιοτιμες.

Θεωρημα III

(i) $\exists$ το πολυ αριθμησιμο συνολο $\Sigma \subset \mathbb{R}$ τ.ω. το Π.Σ.Τ

(1) $\begin{cases} Lu = \lambda u + f, & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases}$

(Για $\lambda > 0$ αρκετά μεγάλο)

$\therefore \quad \max_{\bar{U}} u^{\varepsilon} = \max_{\partial U} u^{\varepsilon}$

Παίρνουμε $\varepsilon \to 0 \implies$

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u \, .$$

5. Για (ii) $L(-u) \leq 0$.