Διάλεξη 3

1. Διευκρινήσεις - Διορθώσεις επί της Διαλέξεως 2

α) Έστω $w \in L^1_{loc}(U)$ και $\int_U w\varphi\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty($

$\Longrightarrow$

$$w = 0 \quad a.e.$$

Απόδειξη

$w = w^+ - w^-$, $\quad a^+ = \max(a, 0)$

$|w| = w^+ + w^-$ $\quad a^- = \max(-a, 0)$.

Χ.β.γ. υποθέτουμε ότι $w \geq 0$.

Έχουμε το Θεώρημα πυκνότητος $\overline{C_c^\infty(U)} = L^1_{loc}(U)$.

$\therefore \; \exists \; \{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(U)$ τ.ω.

$$\varphi_n \xrightarrow{L^1_{loc}} w$$

και κατά συνέπεια για υπακολουθία

$$\varphi_{n'} \longrightarrow w \quad a.e.$$

Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varphi_{n'} \geq 0$.

$\therefore$

$$w\varphi_{n'} \longrightarrow w^2 \quad a.e.$$

Fatou $\Longrightarrow$

$$\underline{\lim} \int_U w\varphi_{n'} \geq \int_U w^2$$

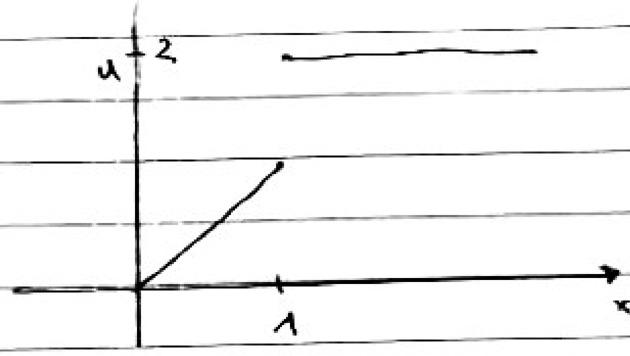
$\int w\varphi_{n'} = 0 \Longrightarrow \int_U w^2 = 0 \Longrightarrow w = 0$ a.

Σ

b) <u>Διορθωση σ. 11,12</u>

$U=(0,2)$

$$u(x)=\begin{cases} x, & 0<x\leq 1 \\ 2, & 1<x<2 \end{cases}$$



• $\exists\, u'$ (ασθενως)

Με εις ατοπον απαγωγη: Εστω οτι $\exists\, v\in L^1_{loc}(0,2)$ τ.ω.

$$(3)' \quad \int_0^2 u\phi'\,dx = -\int_0^2 v\phi\,dx \qquad \forall \phi\in C_c^\infty(0,2)$$

$$1^{ο}\ μελος = \int_0^1 x\phi'\,dx + \int_1^2 2\phi'\,dx$$

$$= \int_0^1 (x\phi)'\,dx - \int_0^1 \phi\,dx + \int_1^2 2\phi'\,dx$$

$$= \phi(1) - \int_0^1 \phi\,dx + 2\left[\cancel{\phi(2)}^{\,0} - \phi(1)\right]_1$$

$$= -\phi(1) - \int_0^1 \phi\,dx = 2^{ο}\ μελος = -\int_0^2 v\phi\,dx$$

$$(4)' \quad \therefore\ \phi(1) + \int_0^1 \phi\,dx = \int_0^2 v\phi\,dx \qquad \forall \phi\in C_c^\infty((0,2))$$

<u>$1^η$ Επιλογη</u>: $\phi\in C_c^\infty((0,1))$

$$(4)' \Rightarrow \int_0^1 \phi\,dx = \int_0^1 v\phi\,dx$$

$\Rightarrow$

$$v(x)=1, \quad x\in(0,1)$$

Επιστροφή στην $(4)'$:

$$\phi(1) + \cancel{\int_0^1 \phi\, dx} = \cancel{\int_0^1 \phi\, dx} + \int_1^2 v\phi\, dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty((0,2))$$

$$\Rightarrow$$

$$(*) \quad \phi(1) = \int_1^2 v\phi\, dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty((0,2)).$$

<u>2η Επιλογή</u> : $\phi \in C_c^\infty((1,2))$

$$\therefore \quad \int_1^2 v\phi\, dx = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty((1,2))$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = 0 \quad , x \in (1,2)$$

Επιστροφή στην $(*)$:

$$\phi(1) = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty((0,2))$$

ΑΤΟΠΟ !

$\square$.

2. <u>Λύσεις Ασκήσεων 1, 2</u>

1) $\alpha > 1$, $\|f\|_{C^{\alpha}(\Omega)} < \infty \iff f \equiv$ σταθερά

Υποθέτουμε ότι Ω είναι ανοικτό, συνεκτικό, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

<u>Απ</u>

Έστω $|\vec{v}| = 1$. $\dfrac{|f(x+tv) - f(x)|}{|t|} < C|t|^{\alpha-1}$

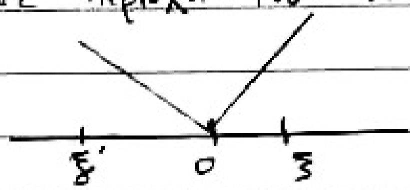
$$\Rightarrow \lim_{|t|\to 0} \frac{|f(x+tv)-f(x)|}{|t|}=0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x)=0 \quad , x\in\Omega$$

$\Rightarrow$ $f\equiv$ σταθερά

□

2) $f(x)=|x|\psi(x)$, $\psi(x)=1$ σε περιοχή του $x=0$, $\psi(x)=0$, εκτός του $[-1,1]$



$C^{0,1}=C^1$) • $f\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

(διαφορίσιμη σε $\forall\ \xi\neq 0$)

• Η f δεν είναι περιορισμός στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ συνάρτησης στο $C^1(\mathbb{R})$ ($\psi(x)=|x|$ σε περιοχή του $x=0$).

$$C_0^1(\Omega) = \overline{\{ f\in C_c^1(\Omega) \}}$$

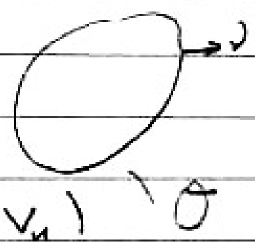
• $f\notin C_0^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

(διότι αν $\{f_n\}\subset C_0^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $f_n\longrightarrow f$
$f_n(x)=0$ σε περιοχή του $x=0$ $\Rightarrow$ $f_n'(x)=0$ σε περιοχή του $x=0$, αντίκειται $f'=1$ σε περιοχή του $x=0$, άτοπο).

□

3. Το Θεώρημα της Απόκλισης

$$\int_\Theta \mathrm{div}\,\vec{V}\,dx = \int_{\partial\Theta} \vec{V}\cdot\vec{\nu}\,dS$$

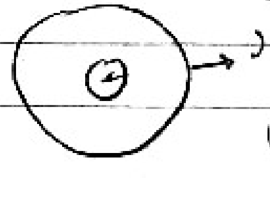


$\vec{V}=(V_1,\dots,V_n)$

Εφαρμογή

$\mathrm{div}\,\vec{V}=\sum \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$

$$\begin{cases} \phi\in C_c^\infty(U), \\ u\in C^1(U-B(0,\varepsilon)) \end{cases}$$



$U=\{|x|<1\}$

$$\int_{U-B(0,\varepsilon)} u\phi_{x_i}\,dx = \int_{U-B(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_i}(u\phi)\,dx - \int_{U-B(0,\varepsilon)} u_{x_i}\phi\,dx$$

$$\vec{V} := (0,0,\dots,0,\underset{\uparrow_{\text{θέση } i}}{u\phi},0,\dots,0)$$

$$\vec{V}\cdot\nu = (0,0,\dots,u\phi,0,\dots,0)\cdot(\nu^1,\dots,\nu^n) = u\phi\nu^i$$

$$\therefore \int_{U-B(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_i}(u\phi)\,dx = \int_{\partial(U-B(0,\varepsilon))} u\phi\nu^i\,dS$$

$$\partial(U-B(0,\varepsilon)) = \partial U \cup \partial B(0,\varepsilon)$$

$$\phi\big|_{\partial U} = 0$$

$\therefore$

$$\int_{U-B(0,\varepsilon)} u\phi_{x_i}\,dx = -\int_{U-B(0,\varepsilon)} u_{x_i}\phi\,dx + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\phi\nu^i\,dS$$

$\square$

4. Πληρότητα

Θεώρημα

Ο $W^{k,p}(U)$, $k=1,\dots$, $1\le p\le\infty$, είναι χώρος Banach.

Απόδειξη

A. Ισοδύναμη νόρμα:

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p$$

$$\|u\|_{k,p}=0 \Leftrightarrow \|u\|_p=0 \Leftrightarrow u=0 \quad (\text{a.e.})$$

$$\|\lambda u\|_{k,p} = |\lambda|\,\|u\|_{k,p}$$

$$\|u+v\|_{k,p} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_p \le \sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_p + \sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha v\|$$

$$= \|u\|_{k,p} + \|v\|_{k,p}$$

B. $\{u_m\}$ Cauchy $W^{k,p}$

$$\|u_m - u_n\|_{k,p} \geq \|D^\alpha u_m - D^\alpha u_n\|_p$$

$\Rightarrow$

$\{D^\alpha u_m\}$ Cauchy L^p

$\therefore$

(1) $\quad D^\alpha u_m \xrightarrow{L^p} u_\alpha \quad , \quad u_m \xrightarrow{L^p} u_{(0,\dots,0)} =: u$

T. • $u \in W^{k,p}(U)$ και $D^\alpha u = u_\alpha$ $(|\alpha| \le k)$

Απόδειξη

$$\int_U u D^\alpha \phi \, dx = \lim \int_U u_m D^\alpha \phi \, dx$$

$$= \lim (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_m \phi \, dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \phi \, dx$$

$\therefore$ $D^\alpha u = u_\alpha$, $|\alpha| \le k$

(1) $\Rightarrow$

$$\| D^\alpha u_m - D^\alpha u \|_p \longrightarrow 0 \quad , \quad |\alpha| \le k$$

$\Rightarrow$

$$\| u_m - u \|_{W^{k,p}} \longrightarrow 0 .$$

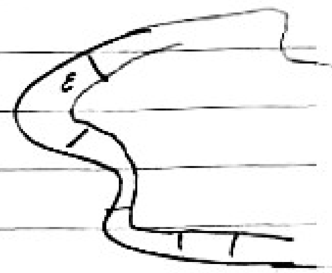
$\square$

Friedrichs

5. Προσεγγίσεις Μέσω Ομαλών Συναρτήσεων (mollifiers)

$U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο, $1 \leq p < \infty$

$U_\varepsilon = \{ x \in U \mid dist(x, \partial U) > \varepsilon \}$

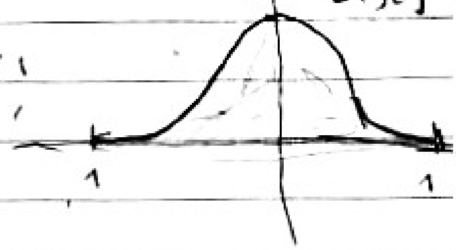


$u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u \quad , x \in U_\varepsilon$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y)\,u(x-y)\,dy = \int_{B(0,\varepsilon)}$$

όπου

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1} \right) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,dx = 1$$

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$supp\ \eta_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$

$u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$!

Θεώρημα: Έστω $u \in W^{k,p}(U)$

Τότε $u^\varepsilon \xrightarrow{W^{k,p}(U)} u \quad , \varepsilon \to 0.$

□