∾ · ∾ · ∾ · ∾ · ∾ · ∾ Διάλεξη ① ∾ · ∾ · ∾ · ∾ · ∾ 1/10/2024

Βιβλίο Αθανασιάδη , Υπάρχουν και σημειώσεις στο internet.

Διακριτά → Απαρίθμηση
→ Γραφήματα
→ ...

$\mathbb{N}$: Φυσικοί Αριθμοί

- $f : X \to Y$ συνάρτηση
  - f 1-1 : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
  - f επί : $f(X) = Y$, $\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$

Δεν επιτρέπεται:

$x \to \bullet \leftarrow y$

Τα σύνολα X, Y θα λέγονται **ισοπληθικά** αν $f : X \xrightarrow[1-1]{\text{επί}} Y$

Είναι σχέση ισοδυναμίας

- X είναι ισοπληθικό με τον εαυτό του ($X \xrightarrow{Id} X$)
- $f : X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Y$ $\quad f^{-1} : Y \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} X$

  $y \mapsto f^{-1}(y) = x$ το μοναδικό x (1-1) ώστε $f(x) = y$ (επί)
- $f : X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Y$, $g : Y \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Z$ $\Big\}$ $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, $f \circ g$ 1-1, επί

$n \in \mathbb{N}$

Ορίζουμε σε αυτό το μάθημα : $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ $\#X = n$ αν και μόνο αν $f : [n] \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} X$

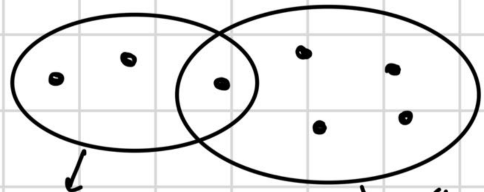
↳ πληθάριθμος

$A_1, \dots, A_n$: σύνολα $A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\Downarrow$$

$$\#\left(\bigcup A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \# A_i$$

Είναι σημαντικό να είναι ξένα μεταξύ τους, γιατί αν δεν είναι:



$\# = 3$ $\# = 5$

$\# = 7$ και όχι 8!

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $m_i = \# A_i \Rightarrow$

$f : A_i \to [m_i] = \{1, 2, 3, \dots, m_i\}$

$f : A_1 \cup A_2 \to [m_1 + m_2]$

Ορίζω

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A_1 \;, f_1 : A_1 \to [m_1] \\ f_2(x) + m_1 & x \in A_2 \end{cases}$$

1-1, <u>επί</u>

Για να το πούμε : $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Αν ορίσω $x, y \in A_1 \cup A_2$ και υποθέσω • $x, y \in A_1$, τότε

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f_1(x) = f_1(y) \underset{1-1}{\overset{f_1}{\Rightarrow}} x = y$$

Αν • $x, y \in A_2$, τότε $f(x) = f(y) \Rightarrow f_2(x) + m_1 = f_2(y) + m_1 \Rightarrow$

$$f_2(x) = f_2(y) \Rightarrow x = y$$

Αν • $x \in A_1, y \in A_2$, τότε $\left.\begin{array}{l} f(x) = f_1(x) \leq m_1 \\ f(y) = f_2(y) + m_1 > m_1 \end{array}\right\}$ Δεν έχω ισότητα

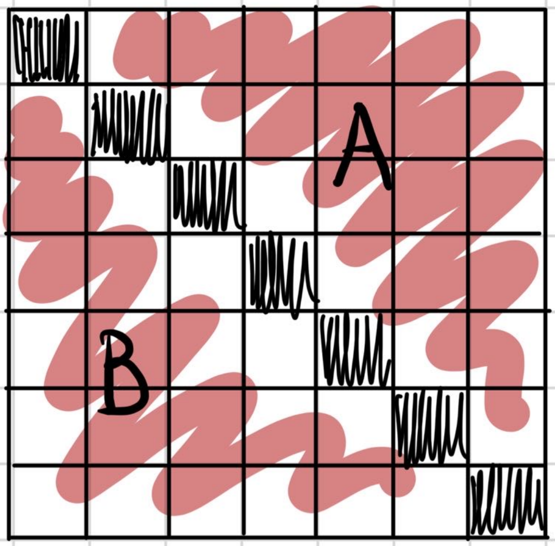
Αφού αποδείξαμε για 2 σύνολα : $\#(A_1 \cup A_m) = \# A_1 \cup \# A_2$

Με επαγωγή θα πάμε για περισσότερα.

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_n\right) = \underbrace{\#\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)}_{\sum_{i=1}^{n-1} \# A_i} + \# A_n$$

↳ Το πως θα το χρησιμοποιήσουμε το κάνει ενδιαφέρον:

Σκακιέρα $n \times n$:



Μετρήστε τα στοιχεία πάνω από την διαγώνιο.

⇝ Τα στοιχεία όλης της σκακιέρας είναι n^2

⇝ Παρατηρώ ότι πάνω και κάτω από τη διαγώνιο έχω το ίδιο πλήθος:

$$f: A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B \Rightarrow \#A = \#B \ (*)$$

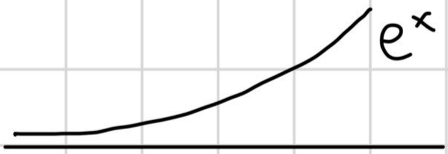
όλη η σκακιέρα ↑, ↑ διαγώνιος

$$T = \Delta \cup A \cup B \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$n^2 = n + 2\#A \Rightarrow \#A = \frac{n^2 - n}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to e^x$



f είναι 1-1 αλλά όχι επί

A: είναι πεπερασμένο σύνολο (αν είναι ισοπληθικό με το $[n]$ με $n \in \mathbb{N}$)

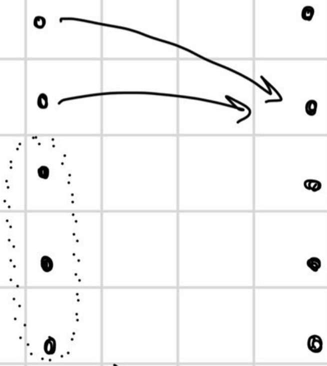
$f: A \to A$

Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν είναι επί

↳ Αυτό δεν ισχύει για άπειρα σύνολα (βλέπε πάνω την e^x)!

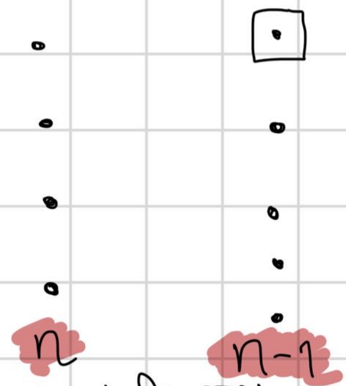
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Δεν είναι 1-1:



↳ Δεν είναι επί

Δεν είναι επί:



↳ Αναγκαστικά θα στείλω 2 βελάκια σε ένα ⇒ όχι 1-1

Αρχή του περιστεριώνα ←

$[n] = \{1,2,3,\dots,n\}$ ⇝ A_n: Το πλήθος των υποσυνόλων του n

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να το μετρήσουμε:

πχ

$$[3] = \{1,2,3\} \to \left.\begin{matrix} \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\} \\ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \\ \{1,2,3\} \end{matrix}\right\} \to 8 \text{ στοιχεία} = 2^3$$

Πρώτος Τρόπος:

$$\Sigma \subset [n]$$

Μπορώ να φτιάξω μια συνάρτηση:

$$f(\Sigma) = \varepsilon_1 + 2\cdot\varepsilon_2 + 2^2\varepsilon_3 + \dots + 2^{n-1}\varepsilon_n \,, \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i \in \Sigma \\ 0, & i \notin \Sigma \end{cases}$$

Δηλαδή
- $f(\{2,3\}) = 0 + 2 + 2^2$
- $f(\emptyset) = 0 + 0\cdot 2 + 0\cdot 2^2$
- $f(\{1,2,3\}) = 1 + 2 + 2^3$

$$0 \leq f(\Sigma) \leq 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{2-1} = 2^{n-1}.$$

Η f είναι 1-1

Χρειάζομαι ότι $\sum_{i=0}^{n-1} e_i 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} e_i' \cdot 2^i \iff e_i = e_i'$ για $i = 0,\dots,n-1$ → Δυαδικό ανάπτυγμα

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} e_i 2^i \qquad 0 \leq e_i < 2$$

↪ Τα e_i είναι μοναδικά. γιατί;

$$X = 2\Pi_0 + e_0$$

$$\mathbb{N} \ni \frac{X - e_0}{2} = 2\Pi_1 + e_1 \Rightarrow \frac{\frac{X-e_0}{2} - e_1}{2} = 2\Pi_2 + e_2$$

⇒ Δυαδική αναπαράσταση είναι μοναδική!

Άρα η f είναι 1-1 και επί ανάμεσα στα σύνολα:

$$\Sigma \subset [n] \to \{0, \dots, \underbrace{2^{n}-1}_{\# 2^n}\}$$

Άλλος τρόπος μετρήματος

$$\Sigma \subset [n] = \{1, \dots, n\}$$

Έχω 2 καταστάσεις:

$\hookrightarrow \underline{n \in \Sigma} = T \cup \{n\}, \ T \subset [n-1]$

$\hookrightarrow \underline{n \notin \Sigma} = T \subset [n-1]$

$$\left.\begin{aligned} \#\{\Sigma \subset [n] : n \in \Sigma\} &= \# A_{n-1} \\ \#\{\Sigma \subset [n] : n \notin \Sigma\} &= \# A_{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \# A_n = 2 \# A_{n-1}$$

$$\Rightarrow \# A_n = 2 \# A_{n-1} = 2 \cdot 2 \# A_{n-2} = 2^n \underbrace{\# A_0}_{=1} = 2^n$$

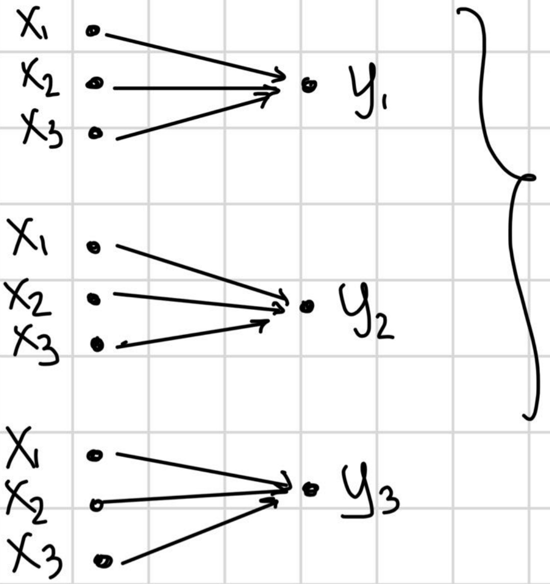
Αυτό μου βγάζει ένα νέο τύπο συνάρτησης:

$f : X \to Y$ θα λέγεται $m \to 1$ (αντί για 1-1)
αν και μόνο αν $\forall y \in Y : \# f^{-1}(y) = m$

↪ συμβολισμός

$$f : X \to Y : f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

Σχηματική εξήγηση:



Συνάρτηση 3 − 1
(Σαν να χωρίζω ομάδες των 3)

Σε αυτή την περίπτωση, αν $\#Y < \infty$ (πεπερασμένο)

$$\#X = m \#Y$$

γιατί;

$$X = \underbrace{\bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)}_{\text{Ξένη ένωση συνόλων}} \Rightarrow \#X = \sum_{y \in Y} \#f^{-1}(y)$$

$$= \sum_{y \in Y} m = m \#Y$$

Έτσι $\{\Sigma \subset [n]\} \xrightarrow{f} \{T \subset [n-1]\}$, όπου:

- $\Sigma \longrightarrow T$ αν $\Sigma = T \cup \{n\}$
- $\Sigma \to T$ αν $\Sigma = T$

$f: 2-1$

↳ Παρόμοιο Παράδειγμα: $X_1 \times \dots \times X_n$ καρτεσιανό γινόμενο συνόλων

$$\#(X_1 \times \dots \times X_n) = \prod_{i=1}^{n} \#X_i$$

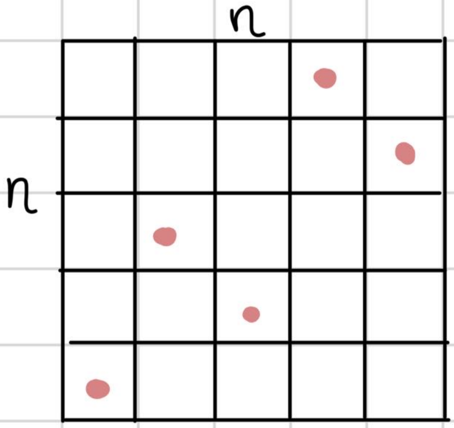
$$X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow X_1 \times \dots \times X_n$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \longrightarrow (a_1, \dots, a_{n-1})$$

$$\#X_n \to 1$$

$\Rightarrow \quad \#(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) = \#X_n \cdot \#(X_1 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}) = \ldots =$ ζητούμενο

Σκάκι



Θέλουμε να βάλουμε n πύργους ώστε κανένας πύργος να μην απειλεί κανέναν άλλον.

Ή αν δεν ξέρω σκάκι:
θέλω να βάλω τελίτσες στα τετράγωνα ώστε σε κάθε στήλη και γραμμή να έχω μια μόνο τελίτσα.

Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

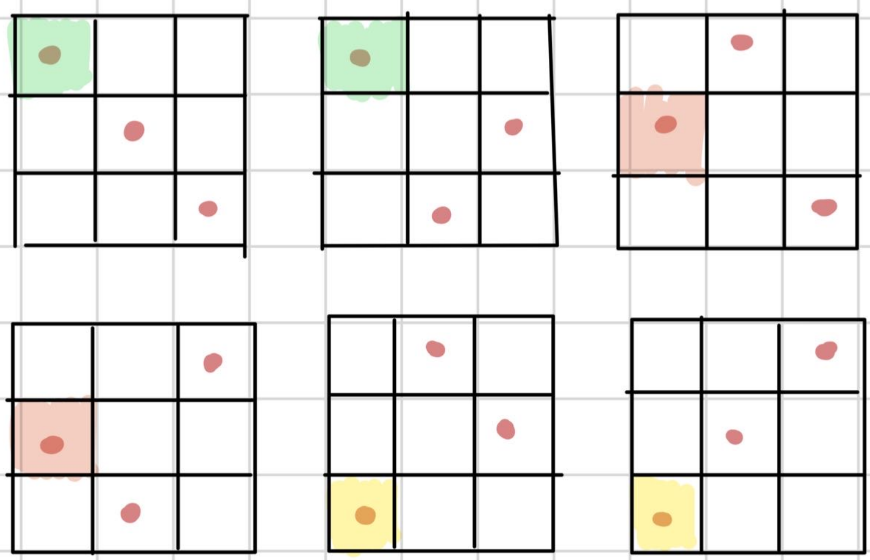
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

γιατί;

→ Τοποθετώ την $1^{η}$ κουκίδα : n πιθανές θέσεις
→ — " — $2^{η}$ — " — : $n-1$ — " —
→ — " — $3^{η}$ — " — : $n-2$ — " —
⋮
→ — " — $n^{η}$ — " — : 1 — " —

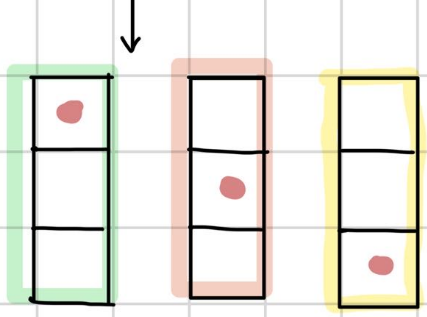
$\Big\}$ $n!$

πχ) 3x3



6 τρόποι = 3!

Τοποθέτηση $1^{ης}$ κουκίδας



$\#$ πρόβλημα $(n-1)$ κουκίδας $\longrightarrow 1$

- $$\#N(n) = n\,\#N(n-1) = n(n-1)\#N(n-2) = \dots = n(n-1)\cdots\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\#N(1)}$$