Προηγούμενη διάλεξη: Τα υποσύνολα $[n]=\{1,\dots,n\}$ είναι 2^n το πλήθος.

⇝ Να υπολογιστεί το πλήθος των ζευγών (S,a) $a\in S$, $S\subset[n]$

(S,a) $a\in[n]$

- Αν $a\in[n]$, έχω 2^n δυνατότητες για το S \
  n δυνατότητες για το a $\Big\}$ $n\cdot 2^n$ στοιχεία

- Αν $a\in S$, $S\subset[n]$, $a\in S$

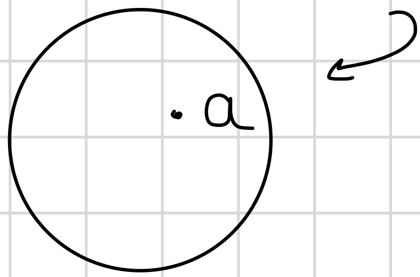
πχ) $n=2$, δυνατότητες: $S=\emptyset$, $S=\{1\}$, $S=\{2\}$, $S=\{1,2\}$ $=4=2^2$

Τα ζευγάρια (S,a), $a\in S$: $(\{1\},1)$, $(\{2\},2)$, \
$(\{1,2\},1)$, $(\{1,2\},2)$

Έχουμε n το πλήθος επιλογές για το a.

Με διαλεγμένο το a, έχουμε 2^{n-1} δυνατά σύνολα T

$$\{a\}\cup T$$
$$T\subset([n]\setminus\{a\})$$



Στο παράδειγμα: αν $a=1$ \
$\{1\}\cup\emptyset$, $\{1\}\cup\{2\}$ \
αν $a=2$ \
$\{2\}\cup\emptyset$, $\{2\}\cup\{1\}$

$\boxed{\underline{\text{Απάντηση}}:\ n\cdot 2^{n-1}}$

⇝ χρήσιμα για πιθανότητες.

Στη γλώσσα του $n-1$:

$f:\{(S,a)\ a\in S,\ S\subset[n]\}\to\{a\in[n]\}$

$\#n$, f είναι $2^{n-1}\to 1$.

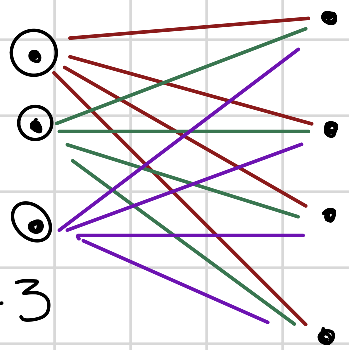
(ζέσταμα)

Πόσες είναι οι συναρτήσεις $f:[m]\to[n]$?

$f(1)$: 4 δυνατότητες

$f(2)$: 4 δυν.

$f(3)$: 4 δυν



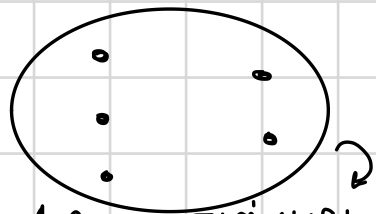
$m=3$ $\quad$ $n=4$

Απάντηση: 4^3 δυνατ. $\Rightarrow$ $\boxed{n^m}$

(α) $f:[m]\to[n]$, όμως 1-1 ?

⇝ Αν $m>n$ δεν υπάρχει καμία. ⇝

(αρχή περιστερώνα)



Δεν φτιάχνει 1-1

⇝ Αν $m\geq n$ (Σαν τη σκακιέρα και τους πύργους)

- $f(1)$ ⇝ n επιλογές
- $f(2)$ ⇝ $n-1$ επιλογές

⋮

→ Συνολικά: $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

(β) $f:[m]\xrightarrow[\text{επί}]{1-1}[n]$

⇝ Αν $m>n$: 0 (Δεν υπάρχουν συναρτήσεις 1-1)

⇝ Αν $m<n$: 0 (—— // —— επί)

⇝ Αν $m=n$: $n!$ ↪ (Το σύνολο των μεταθέσεων!)

Ορισμός Αναδιάταξης

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ ακολουθία του S ($\#S=n<\infty$) ώστε κάθε στοιχείο να εμφανίζεται ακριβώς μια φορά.

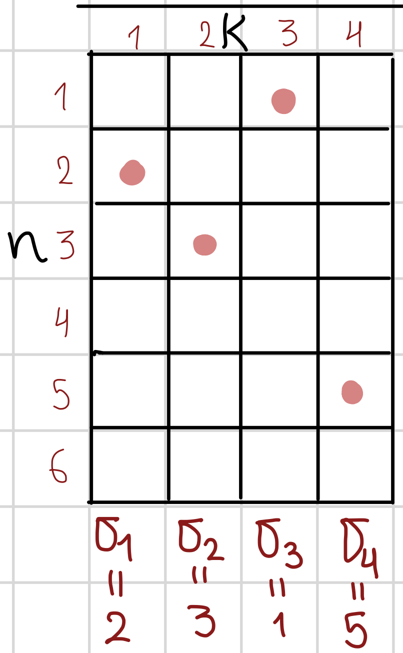
∘ Πόσες είναι οι αναδιατάξεις;

∘ Είναι οι 1-1 συναρτήσεις $[k] \to S$.

∘ Τις μετρήσαμε: $n(n-1)\dots(n-k+1)$

∘ Το $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ είναι συνάρτηση γιατί αλλιώς γράφεται $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)$, και είναι 1-1 γιατί ζήτησα να εμφανίζονται ακριβώς μια φορά!

Αν $k > \#S = n$, έχουμε 0 αναδιατάξεις.



Σκακιέρα $n \times k$: Το ίδιο πρόβλημα με τους πύργους

$k < n$

Χορευτικό Συγκρότημα: n άνδρες, n γυναίκες, θα χορέψουν καλαματιανό 😭 Δεν κάνει κύκλο, είναι ευθεία θα είναι σε ευθεία χωρισμένοι σε άνδρες-γυναίκες:
Ξεκινάμε με άντρα:

όχι δίπλα-δίπλα

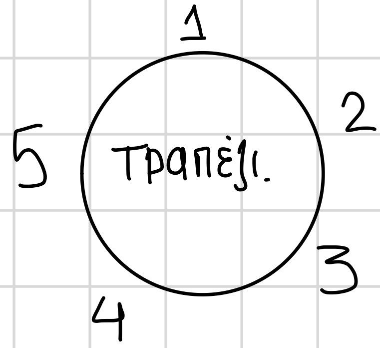
n! αναδιατάξεις των ανδρών

n! αναδιατάξεις των γυναικών (μένουν n θέσεις)

Άρα συνολικά: $\boxed{(n!)^2}$.

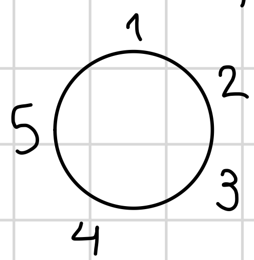
↝ Αν ήταν σε κύκλο?

Έστω ότι έχω 5 άτομα.

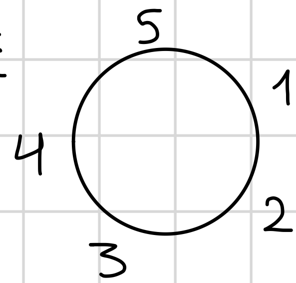


• Εδώ σημασία έχει ποιου έχω δεξιά-αριστερά και όχι οι θέσεις. Δηλαδή:

Το

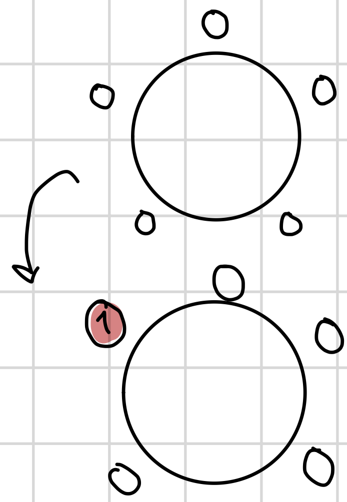


είναι ίδιο με



Άρα οι συνολικές αναδιατάξεις είναι $\boxed{(n-1)!}$

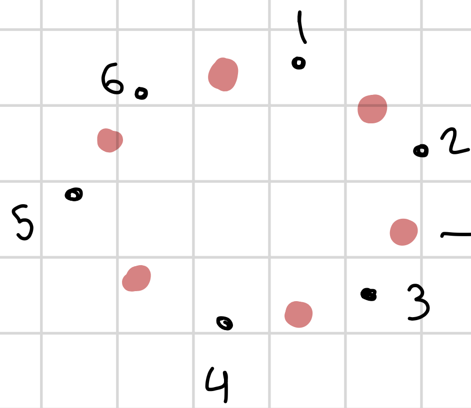
Γιατί:



Ο $1^{ος}$ έχει 5 θέσεις να καθίσει, αλλά για τον λόγο που εξηγήσαμε πάνω, είναι ισοδύναμες.

Έτσι, αν ο πρώτος διάλεξε θέση, τώρα, για τους $n-1$ υπόλοιπους οι θέσεις έχουν σημασία και δεν είναι ισοδύναμες, άρα μετράμε από εδώ!

↝ Κυκλικός χορός n αντρών, n γυναικών, δεν θέλω χορευτές του ίδιου φύλου δίπλα, δίπλα.



Υπάρχουν $(n-1)!$ τρόποι να τοποθετηθούν οι άντρες

→ Μένουν n θέσεις για τις γυναίκες

⇓

Απάντηση: $\boxed{(n-1)!\, n!}$

Ω : Σύνολο με n στοιχεία.
Συνδιασμοί των στοιχείων του Ω ανά k.

Ορίζουμε: $\boxed{\binom{n}{k}}$ = πόσοι τρόποι μπορώ να διαλέξω k στοιχεία από n

Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 2 στοιχεία από το Ω:

$\{1,2,3,4\} = \Omega$

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}$

$\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$

$\Big\}$ 6 τρόποι : $\binom{2}{4} = 6$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Θα το μετρήσουμε

$A(n,k)$: Το σύνολο k αναδιατάξεων

$\# A(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$

Μετράει το πλήθος των ακολουθιών: $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$: αναδιατάξεις με k στοιχεία.

Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι να διαλέξουμε k από n. Αφού τα διαλέξουμε υπάρχουν $k!$ τρόποι να τα αναδιατάξουμε. Συμπέρασμα:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \binom{n}{k} \cdot k!$$

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$$n! = n(n-1)\dots(n-k+1)\underbrace{(n-k)(n-k-1)\cdots 1}_{(n-k)!}$$

Διωνυμικό θεώρημα : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{y} x^k y^{n-k}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\dots(x_n+y_n) = \sum_{S\subset[n]} x_S\, y_{\bar S} \rightsquigarrow \bar S = [n]\setminus S$$

• $S\subset[n]$, συμβολίζω $x_S = \prod_{i\in S} x_i \rightsquigarrow$ πχ) $S=\{1,5,6\}\subset[10]$

$x_S = x_1\cdot x_5\cdot x_6$

Πρώτα ένα παράδειγμα:

$S\subset[1]$ $\quad S=\emptyset$ ή $S=\{1\}$

$$x_1+y_1 = \underbrace{x_{\{1\}}}_{x_1}\cdot y_\emptyset + x_\emptyset\cdot \underbrace{y_{\{1\}}}_{y_1}$$

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2) = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2$$
$$= x_{\{1,2\}}y_\emptyset + x_{\{1\}}y_{\{2\}} + x_{\{2\}}y_{\{1\}} + x_\emptyset y_{\{1,2\}}$$

Με επαγωγή:

$$(x_1+y_1)\dots(x_{n-1}+y_{n-1}) = \sum_{S\subset[n-1]} x_S\, y_{\bar S} \quad (*) \Rightarrow$$

$$(x_1+y_1)\dots(x_{n-1}+y_{n-1})(x_n+y_n) = \underbrace{\sum_{S\subset[n-1]} x_S y_{\bar S}\, x_n}_{} + \underbrace{\sum_{S\subset[n-1]} x_S y_{\bar S}\, y_n}_{}$$

$$= \sum_{T\subset[n],\, n\in T} x_T y_{\bar T} + \sum_{T\subset[n],\, n\notin T} x_T y_{\bar T}$$

$$= \sum_{T\subset[n]} x_T y_{\bar T}$$

Αν πάρω $\left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 = \dots = x_n = x \\ y_1 = y_2 = \dots = y_n = y \end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} (x+y)^n = \sum_{S\subset[n]} x_S\, y_{\bar S} \Rightarrow$

$$(x+y)^n = \sum_{S \subset [n]} x_S y_{\bar{S}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

$$x_S y_{\bar{S}} = x^{\#S} y^{\#\bar{S}} = x^k y^{n-k}$$

$$k = \#S$$

---

a) $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$ $\quad 1 \leq k \leq n$

Αποδεικνύεται με 2 τρόπους:

1) (Φορμαλιστικός) $\quad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!}$

Άρα ίσα

2) (Συνδιαστικός)

Κάθε φορά που επιλέγω σύνολο με k στοιχεία επιλέγω και το συμπλήρωμά τους.

πχ) Αν έχω το σύνολο $\{1,2,3\}$ και επιλέξω:

4 στοιχεία $\left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ \{1\} \\ \{2\} \\ \{3\} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Συμπληρώματα}} \left. \begin{array}{l} \{1,2,3\} \\ \{2,3\} \\ \{1,3\} \\ \{1,2\} \end{array} \right\}$ 4 στοιχεία

→ Συμμετρία ↙

β) $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$ ⇝ Τρίγωνο του Pascal

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1) (Φορμαλιστική)

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\underbrace{(n-1-(k-1))!}_{(n-k)!}} =$$

$(x+y)^2$: 1 2 1

$(x+y)^3$: 1 3 3 1

$(x+y)^4$: 1 4 6 4 1

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right)$$

$$\frac{n-k+k}{(n-k)k} = \frac{n}{k(n-k)}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2) $S \subset [n]$, $\# S = k$

$n \in S \rightsquigarrow$ πόσα είναι αυτά τα υποσύνολα; $T \cup \{n\}$, $T \subset [n-1]$, $\# T = k-1$

$n \notin S \rightsquigarrow T \subset [n-1]$