Διάλεξη 3 8/10/24

Συνδυασμοί

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ⇝ οι τρόποι να διαλέξουμε k στοιχεία από ένα σύνολο n στοιχείων

$$(x+y)^n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} x^v y^{n-v}$$ ⊛

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

→ 1ος τρόπος απόδειξης: $x=y=1$

→ 2ος τρόπος —″— : 2^n είναι το πλήθος όλων των υποσυνόλων του $[n]$.

$$= \underbrace{\underset{\substack{\| \\ 1 \rightsquigarrow \emptyset \\ \text{υποσύνολα του } [n] \text{ με 0 στοιχεία}}}{\binom{n}{0}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{υποσ. του } [n] \\ \text{με 1 στοιχείο}}}{\binom{n}{1}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{υποσ. του } [n] \\ \text{με 2 στοιχεία}}}{\binom{n}{2}} + \dots + \underset{\substack{\| \\ 1 \\ \text{υποσύνολα με } n \\ \text{στοιχεία}}}{\binom{n}{n}}}_{= 2^n}$$

⇝ έχουν μια συμμετρία $\left(\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \right)$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0}$$

Α-τρόπος : $x=-1$, $y=1$ στον ⊛

Β-τρόπος – συνδυαστικός :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

↳ δηλαδή το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$ με άρτιο πλήθος στοιχείων είναι ίσο με το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$ με περιττό πλήθος στοιχείων.

- X_n : είναι το σύνολο των υποσυνόλων με άρτιο πλ. στοιχείων

• Y_n: —— // —— —— // —— περιττό —— // ——

• Ορίζω συνάρτηση $X_n \to Y_n$

$$S \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \varphi(S) = \begin{cases} S \setminus \{n\}, & n \in S \\ S \cup \{n\}, & n \notin S \end{cases}$$

(1-1 + επί ⤳ ίδιο πλήθος στοιχείων)

Γιατί είναι 1-1 και επί; ⤳ $\left\{ \begin{matrix} Y_n \to X_n \\ S \to \varphi(S) \end{matrix} \right\}$, $\varphi^2 = Id$.

πχ)

[4]

$$\begin{array}{lllll}
\emptyset & \xrightarrow{\varphi} & \{4\} & \xrightarrow{\varphi} & \emptyset \\
\{1,2\} & \xrightarrow{\varphi} & \{1,2,4\} & \xrightarrow{\varphi} & \{1,2\} \\
\{1,3\} & \xrightarrow{\varphi} & \{1,3,4\} & \xrightarrow{\varphi} & \{1,3\} \\
\{2,3\} & \xrightarrow{\varphi} & \{2,3,4\} & \xrightarrow{\varphi} & \{2,3\} \\
\{1,4\} & \xrightarrow{\varphi} & \{1\} & \xrightarrow{\varphi} & \{1,4\} \\
\{2,4\} & \xrightarrow{\varphi} & \{2\} & \xrightarrow{\varphi} & \{2,4\} \\
\{3,4\} & \xrightarrow{\varphi} & \{3\} & \xrightarrow{\varphi} & \{3,4\} \\
\{1,2,3,4\} & \xrightarrow{\varphi} & \{1,2,3\} & \xrightarrow{\varphi} & \{1,2,3,4\}
\end{array}$$

"τα άρτια" "τα περιττά"

Γιατό είναι η $\varphi^2 \to Id$

"ταυτοτική".

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}}$$

Ισότητα πολυωνύμων ⤳ παραγωγίζω.

<u>1ος τρόπος</u>: (φορμαλιστικός)

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \Rightarrow$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} \qquad x=1$$

$$n 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

$2^{ος}$ τρόπος:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$n! = n\cdot(n-1)!$

$k! = k(k-1)!$

$$= \sum_{k=1}^{n} n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!}$$

k=0 είναι k=1 γιατί το k=0 δεν μετράει

$$= \sum_{k=1}^{n} n\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

το n είναι άσχετο με την σειρά της πρόσθεσης

θέτω $\lambda = k-1$

$$= n\boxed{\sum_{\lambda=0}^{n}\binom{n-1}{\lambda}}$$

από πριν: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ ⊛

$$= n\,2^{n-1}.$$

$3^{ος}$ τρόπος: (Συνδιαστικά)

$k\binom{n}{k}$: Διαλέγω υποσύνολα ανθρώπων "με αρχηγό".

Δλδ, υποσύνολο με διακεκριμένο στοιχείο

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

n: τρόποι που μπορώ να επιλέξω τον αρχηγό

2^{n-1}: οι υπόλοιποι που μείναν : $n-1$ ⇝ 2^{n-1} τρόποι.

Σημαντική άσκηση!

Παράδειγμα: • Πόσα διατεταγμένα ζεύγη (S,T), $S,T \subset [n]$

⇝ Το πλήθος τους είναι $2^n \cdot 2^n$

• πόσα διατεταγμένα ζεύγη (S,T), $S,T\subset[n]$, αλλά τώρα: + $S\subset T$

↝ Για το T, έχουμε $\binom{n}{k}$ επιλογές αν το T έχει k στοιχεία.

Για το S, έχουμε $\binom{k}{i}$ επιλογές αν το S έχει i στοιχεία

· Άρα, το ζητούμενο πλήθος:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{i}$$ ↝ θα δείξουμε ότι $= 3^n$!

$$\cdot \binom{n}{k}\binom{k}{i} = \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} \cdot \frac{\cancel{k!}}{i!(k-i)!} =$$

$$= \frac{n!}{i!(n-k)!(k-i)!}$$

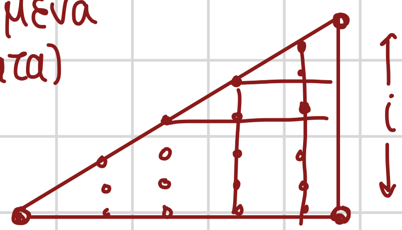
$$= \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \cdot \boxed{\frac{(n-i)!}{\underbrace{(n-k)!}_{[(n-i)-(k-i)]!}(k-i)!}}$$

$$= \binom{n}{i}\boxed{\binom{n-i}{k-i}}$$

· Άρα:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$$

Αλλάζω τη φορά της άθροισης: (Στα πεπερασμένα αθροίσματα)



$0 \le k \le n$

↓

Σαν την αλλαγή μεταβλητής στα ολοκληρώματα, αλλά για αθροίσματα.

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$$ θέτω $\lambda = k-i$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{n-i} \binom{n-i}{\lambda}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 2^{n-i}$$

↝ Διωνυμικός τύπος

$= (1+2)^n = 3^n.$

<u>β' τρόπος (Συνδιαστικός):</u> $A \subset B \subset [n]$

για κάθε $i \in [n]$:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{lll} i \in A & \text{και} & i \in B \\ i \notin A & \text{και} & i \in B \\ i \notin A & \text{και} & i \notin B \end{array}\right.}$$

πχ) $n=4$ $A=\{3\}$, $B=\{1,3,4\}$

$$\left\{\begin{array}{ll} 1: & 1 \notin A, \; 1 \in B \\ 2: & 2 \notin A, \; 2 \notin B \\ 3: & 3 \in A, \; 3 \in B \\ 4: & 4 \notin A, \; 4 \in B \end{array}\right.$$

Για κάθε 1,2,3,4 διαλέγω μια από τις 3 διαθέσιμες επιλογές

για $i \in [n]$ έχουμε 3 επιλογές

$\Rightarrow$ Συνολικά <u>3^n επιλογές</u>.

Αναδιατάξεις από συλλογές.

Σύνολο με r στοιχεία: $x_1, \dots, x_r$

$\downarrow$

$\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ μήκος n

Το στοιχείο x_i εμφανίζεται n_i φορές

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$

πχ) $\{x, x, x, y, z, z\}$ → Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να το κάνω αυτό;

$\{x, y, z, x, x, z\}$

νέος διωνυμικός συντελεστής

$$\boxed{\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!} \qquad n_1 + n_2 + \dots + n_r = n}$$

Ο Ζητούμενος αριθμός:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \underbrace{\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-(n_1+n_2)}{n_3}\cdots\binom{n-(n_1+\dots+n_{r-1})}{n_r}}_{\downarrow \text{ πως προκύπτουν;}} \quad (*)$$

As δούμε το παράδειγμα με τα γράμματα από πάνω:

$$\{\underbrace{x, x, x}_{3}, \underbrace{y}_{1}, \underbrace{z, z}_{2}\}$$

• $n_1 = 3$: $\square \ \square \ \square \ \square \ \square \ \dots \square \ \square$

$n_2 = 1$

$n_3 = 2$

- Για τα x ($n_1=3$), έχω να διαλέξω 3 κουτάκια από n. $\rightarrow \binom{n}{n_1}$
- Για τα y ($n_2=1$) έχω να διαλέξω 1 κουτάκι, από $n-3$ ($n-n_1$). $\rightarrow \binom{n-n_1}{n_2}$
- Για τα z ($n_3=2$), έχω να διαλέξω 2 κουτάκι, από $n-4$ ($n-(n_1+n_2)$). $\rightarrow \binom{n-(n_1+n_2)}{n_3}$

Συνεχίζουμε την (*):

$$= \frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-(n_1+n_2))!}}{n_3!\,\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}} \cdots \frac{\cancel{}}{n_r!\cdot(\underbrace{(n-(n_1+n_2+\dots+n_r)-n_r)}_{0!=1})!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}.$$

πχ) ΘΑΛΑΣΣΑ

1 Λ, 3 Α, 2 Σ, 1 Θ

Σημαντική τεχνική γενικά, πχ για τις πιθανότητες.

$$\frac{7!}{\underset{3A}{3!}\,\underset{2\Sigma}{2!}\,\underset{1\Lambda}{1!}\,\underset{1\Theta}{1!}} = 420 \text{ τρόποι}$$

7 γράμματα

Διωνυμικός τύπος πάνω από αυτό:

$$\boxed{(X_1+X_2+\dots+X_r)^n = \sum_{\substack{0\le n_1,\dots,n_r\le n\\ n_1+n_2+\dots+n_r=n}} \binom{n}{n_1,\dots,n_r} X_1^{n_1}\cdots X_r^{n_r}}$$

↳ Διωνυμικός τύπος σε πολλές μεταβλητές.

Για $r=2$:

$$(x+y)^n = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1,n_2} x^{n_1} y^{n_2}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{n} \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} x^{n_1} y^{n-n_1}, \quad n-n_1 = n_2$$

$$\boxed{(X_1+\dots+X_r)^n = \sum_{f:[n]\to[r]} X_{f(1)}\cdots X_{f(n)}}$$

Απόδειξη με επαγωγή στο n:

- $n=1$:

$$X_1+\dots+X_r = \sum_{f:[1]\to[r]} X_{f(1)}$$

$1 \to 1, 2, \dots, r$ → μια συνάρτηση για κάθε επιλογή.

- Επαγωγική υπόθεση:

$$(x_1+\dots+x_r)^n(x_1+\dots+x_r)=\sum_{k=1}^{r}\Big(\sum_{f:[n]\to[r]} x_{f(1)}\cdots x_{f(n)}\cdot x_k\Big)$$

$$=\sum_{f:[n+1]\to[r]} x_{f(1)}\cdots x_{f(n)}x_{f(n+1)}$$

- Αν διαλέξω $\underline{x_1^{k_1}\cdots x_r^{k_s}}$ $\quad k_1+\dots+k_s=n$

  έχω δλδ μια λέξη που εμφανίζεται το γράμμα x_1, k_1 φορές, ..., γράμμα x_r, k_s φορές.

  πχ) $x_1x_2x_1x_3x_4=x_1^2x_2x_3x_4$

$$\boxed{\binom{n}{n_1,\dots,n_r}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}}$$

- Το πλήθος των ακολουθιών ξένων ανα 2 υποσυνόλων του $[n]$ $(S_1,\dots,S_r)$ με ένωση ίση με $[n]$ και $\#S_i=n_i$.

- Το πλήθος που μπορούν να μοιραστούν n αντικείμενα σε r-κουτιά, όπου κάθε κουτί θα πάρει n_i αντικείμενα.

3	2	1	1
Α	Σ	Θ	Λ

hey 👉👈

Αν σου αρέσουν οι σημειώσεις αυτές
you will also enjoy my ✨art✨

Τσέκαρε στο instagram: @koko.texnh

(yes this is a self-promo)

(εκεί μπορείς να μου στείλεις και όποια απορία για τις σημειώσεις φυσικά).

That's it, καλό διάβασμα.