Διάλεξη ④ 10/10/24

Συνθέσεις Ακεραίων

Σύνθεση η διατεταγμένη διαμέριση του n είναι μια ακολουθία
$p=(r_1,\dots,r_k)$

$r_1+\dots+r_k=n$ ~> με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να γράψω το n ως άθροισμα θετικών ακεραίων.

$r_i>0$

σύνθεση με k μέρη

πχ) 4 : $(1,3)$, $(2,1,1)$, $(1,1,2)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,2,1)$, $(1,1,1,1)$, (4)

συνθέσεις με 2 μέρη — συνθέσεις με 3 μέρη. — σύνθεση με 4 μέρη. — Συν. με 1 μέρος

Το πλήθος όλων των συνθέσεων του n: $\boxed{2^{n-1}}$

Το πλήθος των συνθέσεων με k μέρη: $\boxed{\binom{n-1}{k-1}}$

↓ ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (n)

$$X_n \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Y_n$$

το πλήθος των συνθέσεων — το σύνολο των υποσυνόλων του $[n-1]$

$$p=(r_1,r_2,\dots,r_k) \xrightarrow{\varphi} \{r_1,\ r_1+r_2,\ r_1+r_2+r_3,\dots,r_1+r_2+\dots+r_{k-1}\} \subset [n-1]$$

πχ:

$\{1,1,1,1\} \to \{1,2,3\}$
$4 \to \varnothing \to 4$
$\{1,3\} \to \{1\} \to \{1,3\}$
$\{3,1\} \to \{3\} \to \{3,1\}$
$\{2,2\} \to \{2\} \to \{2,2\}$
$\{2,1,1\} \to \{2,3\} \to \{2,1,1\}$
$\{1,1,2\} \to \{1,2\} \to \{1,1,2\}$
$\{1,2,1\} \to \{1,3\} \to \{1,2,1\}$

$k\le n$
$k-1\le n-1$ $\quad \to s_1<s_2<\dots<s_{k-1}$

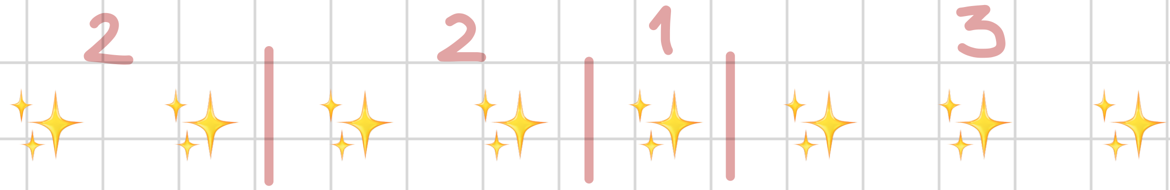
$\exists\ \psi(\{s_1,\dots,s_{k-1}\}) =$
$=(s_1,\ s_2-s_1,\ s_3-s_2,\dots,$
$s_{k-1}-s_{k-2},\ n-s_{k-1})$

$\Rightarrow \varphi\ 1-1$

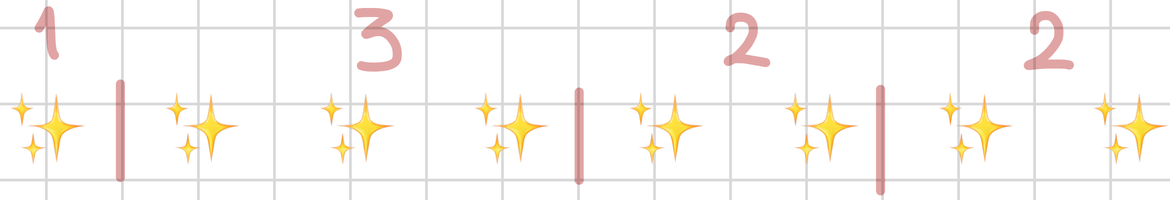
$\Rightarrow$ Σύνθεση με k μέρη είναι υποσύνολο του $[n-1]$ με $k-1$ το πλήθος στοιχεία.

B' τρόπος: [Bars and stars]

n αστέρια ↓ χωρίζω σε k κομμάτια



↓ k-1 μπάρες



⇝ Δεν επιτρέπεται να βάλω σε ένα κενό 2 μπάρες, άρα έχω να βάλω k-1 μπάρες στα κενά ανάμεσα στα αστεράκια. Τα κενά ανάμεσα στα αστεράκια είναι n-1.

$\binom{n-1}{k-1}$: το πλήθος των συνδέσεων

→ Παρατήρησε στο παράδειγμα ότι n=8 και βγαίνουν αντίστοιχα τα νούμερα.

Συνδυασμοί με επανάληψη.

$\binom{n}{k}$: το πλήθος των διανυσμάτων $(a_1,\dots,a_n)\in\{0,1\}^n$ όπου $a_1+a_2+\dots+a_n=k$ ↓ ακριβώς k μονάδες

Γενικότερα:

→ Στη βιβλιογραφία: $\left(\binom{n}{k}\right)$

- θέλω το πλήθος των διανυσμάτων $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{N}$: $a_1+\dots+a_n=k$
  (το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη)

  πχ) $(1,3,0,5,6)$ ⇝ 15

⇝ το πλήθος των μονωνύμων $x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$ βαθμού k.

πχ) $\left(\!\binom{3}{2}\!\right) =$ 3άδες που να αθροίζουν στο 2 $= 6$

$(2,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,2,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,2)$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$: $\boxed{\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}}$

<u>1η ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: $A(n,k) =$ σύνολο διανυσμάτων με $(a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{N}$
$a_1 + \dots + a_n = k$.

Θέλουμε να πάμε στο προηγούμενο πρόβλημα, αλλά σε αυτό θέλω να έχω <u>και το μηδέν στα a_i</u>!

↳ θέτω $b_i = a_i + 1$ $\quad b_1 + b_2 + \dots + b_n = n+k$
$b_i > 0$ $\quad$ ⇝ πρόσθεσα σε όλα τη μονάδα

Και έτσι, έχω το προηγούμενο πρόβλημα, δηλαδή Συνθέσεις του $n+k$ σε n-μέρη:

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{n+k-1-(n-1)} = \binom{n+k-1}{k}$$

<u>2ος τρόπος</u>: (stars n bars)

$2 + 2 + 2 + 1 + 2 = 8$

✨ ✨ | ✨ ✨ | ✨ ✨ | ✨ | ✨ ✨

↳ k αστέρια, $n-1$ μπάρες αν χωρίσω σε n κομμάτια (πχ. αν χωρίσω σε 5, θα βάλω 4 μπάρες).

Τώρα όμως, μπορώ να βάλω διπλή μπάρα

✨ || ✨ ✨ | ✨ ✨ ✨ | ✨ ✨ ✨

$1 + 0 + 2 + 3 + 3 = 8$

↳ $(1,0,2,3,3)$

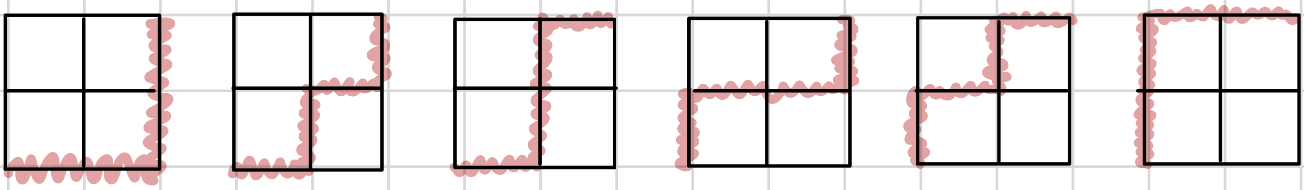
κ αστέρια
n-1 μπάρες
σε κ+n-1 θέσεις

Αν είχα τα αστέρια σε κύκλο, θα είχα n μπάρες

πχ) Πόσα μονώνυμα $x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}$ βαθμού 2 υπάρχουν ?

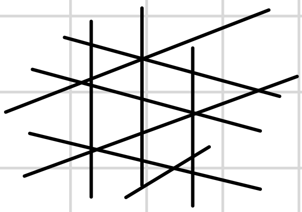
$x^2, xy, yz, xz, y^2, z^2 = 6$

πχ) Πόσα ομογενή πολυώνυμα υπάρχουν σε 10 μεταβλητές τα οποία να έχουν βαθμό 4.



↓ μόνο οριζόντιες + κάθετες κινήσεις

$\mathbb{Z}^d$:



⇝ κυβάκια στον χώρο

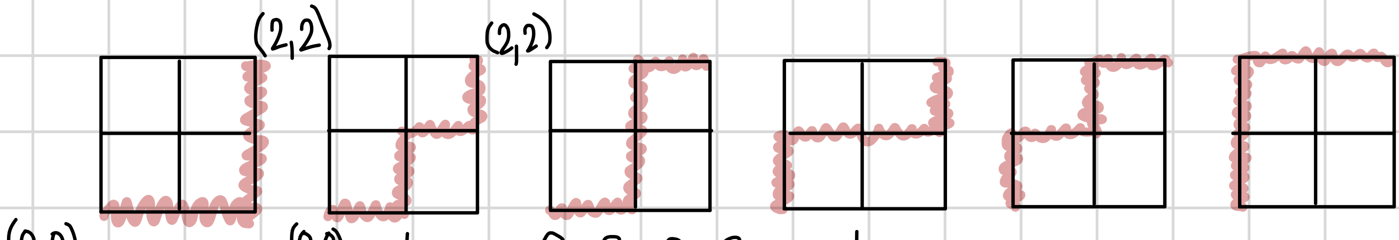
Από σημείο: $a \in \mathbb{Z}^d = (a_1,\dots,a_n)$, θέλω να πάω σε σημείο $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{Z}^d$ με κινήσεις $e_1,\dots,e_n$ (η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$).

↳ $e_i = (0,0,\dots,\underset{i \text{ θέση}}{1},0,0)$

↓

είναι το ίδιο, με το πόσους τρόπους έχω να πάω από το $(0,0,0,\dots,0)$ στο $(a_1-b_1, a_2-b_2,\dots,a_n-b_n)$.

Το πλήθος των μονοπατιών από το $(0,0,\dots,0)$ στο $(n_1,\dots,n_d)$ $n_i\in\mathbb{N}$, είναι ίσα με $\binom{n_1+\dots+n_d}{n_1,\dots,n_d} = \frac{(n_1+\dots+n_d)!}{n_1!n_2!\dots n_d!}$



$e_1+e_2+e_1+e_2$ $e_1+e_2+e_2+e_1$ $e_2+e_1+e_1+e_2$ ...   ...

$e_1=(1,0)$
$e_2=(0,1)$

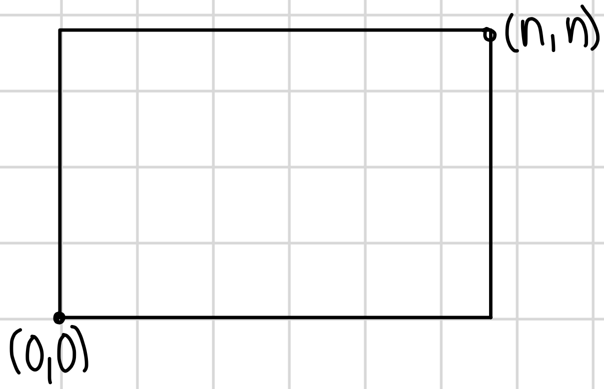
$$\underbrace{e_1+e_1}_{\text{2 φορές δεξιά}}+\underbrace{e_2+e_2}_{\text{2 φορές πάνω}}$$

⇝ Για να πάω $(0,0)\to(n_1,n_2)$ χρειάζομαι $\begin{cases} n_1 \text{ διανύσματα } e_1 \\ n_2 \text{ —״— } e_2 \end{cases}$

$\Rightarrow n_1+n_2$ κινήσεις

· Άρα έχω να επιλέξω πότε στο n_1+n_2 θα κάνω την κίνηση e_1
Αυτό γίνεται με $\binom{n_1+n_2}{n_1}=\binom{n_1+n_2}{n_2}=\binom{n_1+n_2}{n_1,n_2}$ τρόπους

Τώρα είμαστε στο επίπεδο:

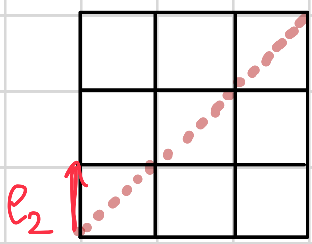


Με $\binom{2n}{n}$ τρόπους

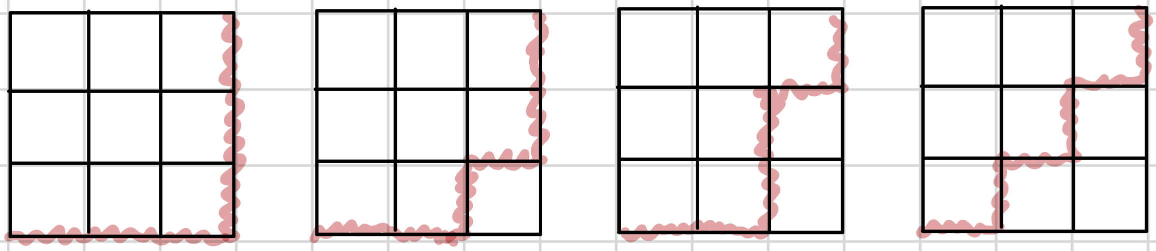
(έχω όλες τις κινήσεις)

και βάζω έναν περιορισμό, ότι δεν θέλω να περάσω την διαγώνιο.

πχ)



→ Δεν επιτρέπεται η 1η κίνηση να είναι e_2! Πρέπει να είναι e_1, όπως και η τελευταία e_2!



Αυτά τα μονοπάτια έχουν έναν αριθμό $C_n = \frac{1}{1+n}\binom{2n}{n}$

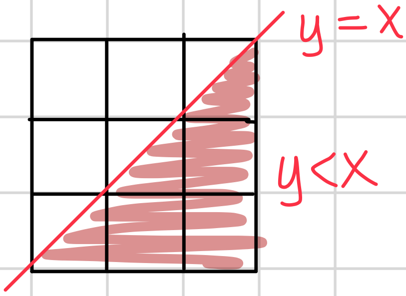
και $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$, $C_0 = 1$, $n \geq 0$. $\overset{n}{\mathbb{Z}}$

- $P(m,n)$: Το σύνολο των μονοπατιών στο $\mathbb{Z}^2$ με αρχή το $(0,0)$ και τέλος το (m,n) και βήματα e_1 και e_2 (προηγούμενο πρόβλημα).

- $P^+(n,n) \subset P(n,n)$

  $\downarrow$

  (x,y) $y \leq x$



$C_n = \# P^+(n,n)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- $P^-(n,n) = P(n,n) - P^+(n,n)$

Ισχυρισμός: $P^-(n,n) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} P(n-1,n+1)$ ($\Rightarrow$ ίδιο πλήθος)

Το ζητούμενο πλήθος: $C_n = \# P(n,n) - \# P(n-1,n+1)$

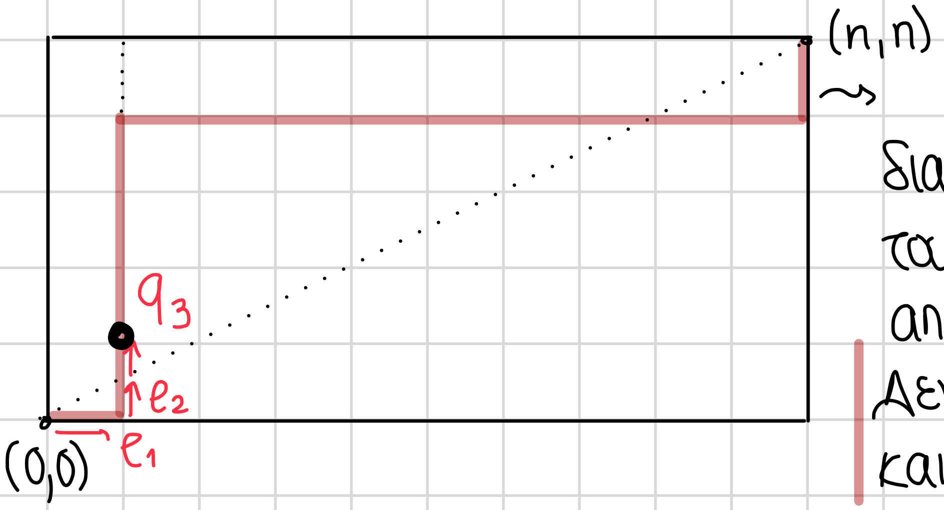
$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} - \frac{(2n)!\,n}{n\,(n-1)!(n+1)!} =$$

Κοινός παράγοντας

$$= \binom{2n}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \ldots = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Μένει να αποδείξω την 1-1 και επί αντιστοιχία:



⇝ Μονοπάτι πάνω από την διαγώνιο (το συμπλήρωμα του να είναι γνήσια κάτω από τη διαγώνιο)

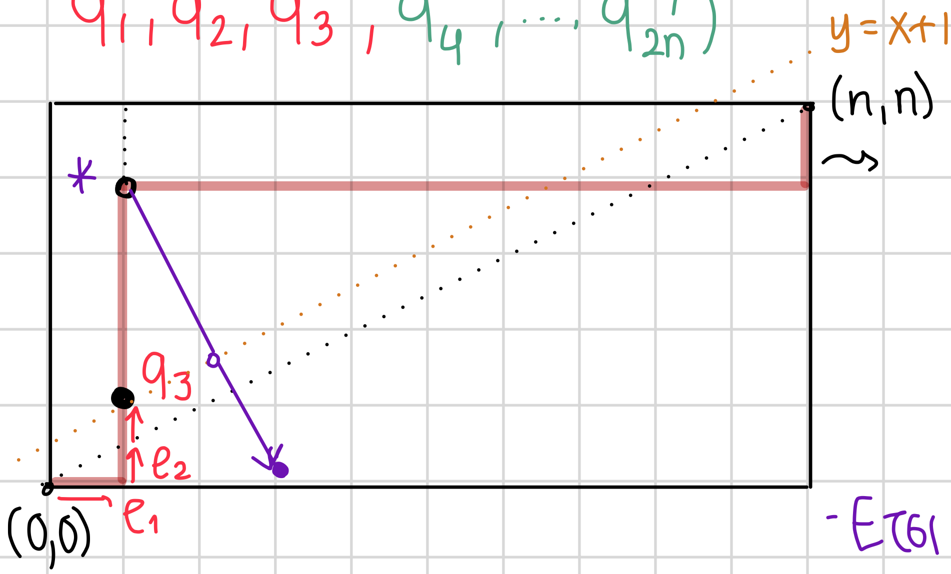
Δεν έχει σημασία που έχει και λίγο από κάτω.

! το συμπλήρωμα δηλαδή, είναι να έχει έστω και λίγο πάνω!

⇝ Θεωρώ το μονοπάτι που έχει $(q_1, q_2, \dots, q_{2n})$ βήματα (?)
i: ο 1ος δείκτης ώστε q_i πάνω από την διαγώνιο.

(Στο παράδειγμα το q_3)

$(q_1, q_2, q_3, q_4', \dots, q_{2n}')$



⇝ * Βρίσκω το κατοπτρικό του σημείο ως προς την $y=x+1$ και έτσι για e_1 κίνηση έχω e_2 κατοπτρικά και αντίθετα.

- Έτσι, θα βρω ένα μονοπάτι το οποίο θα είναι μέσα στο $P(n-1, n+1)$.

Και έτσι θα δείξω ότι αυτή η συνάρτηση είναι 1-1 και επί κάνοντας τον αντίθετο κατοπτρισμό.

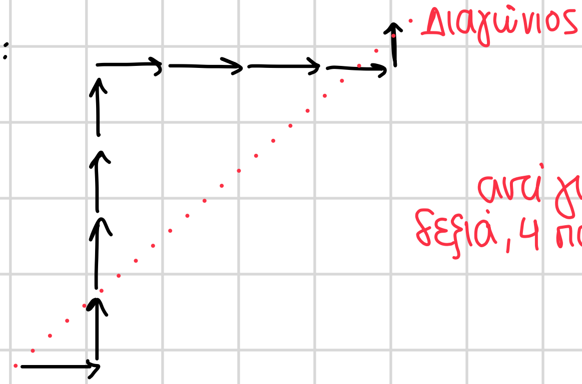
(Καλύτερα να δείτε και στο delos, το έκανα όσο καλύτερα μπορούσα 🤠)

Παράδειγμα:

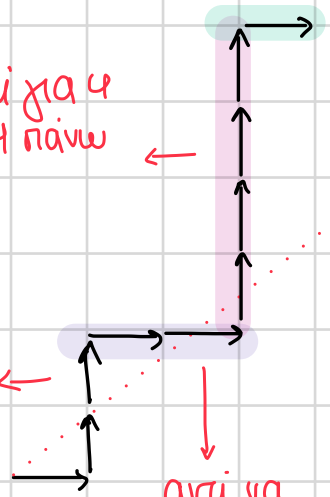
(n, n)

$(5, 5)$

δεξιά πάνω



Συμμετρικό



αντί για 1 πάνω, 1 δεξιά

αντί για 4 δεξιά, 4 πάνω

Διαγώνιος

πέρασα πάνω από τη διαγώνιο/ μένει ίδιο

αντί να πάω 2 φορές προς τα πάνω, πάω δεξιά

$(n-1, n+1)$

$5-1 \quad 5+1$

$(4, 6)$

δεξιά πάνω

Αναδρομικός τύπος:

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$$