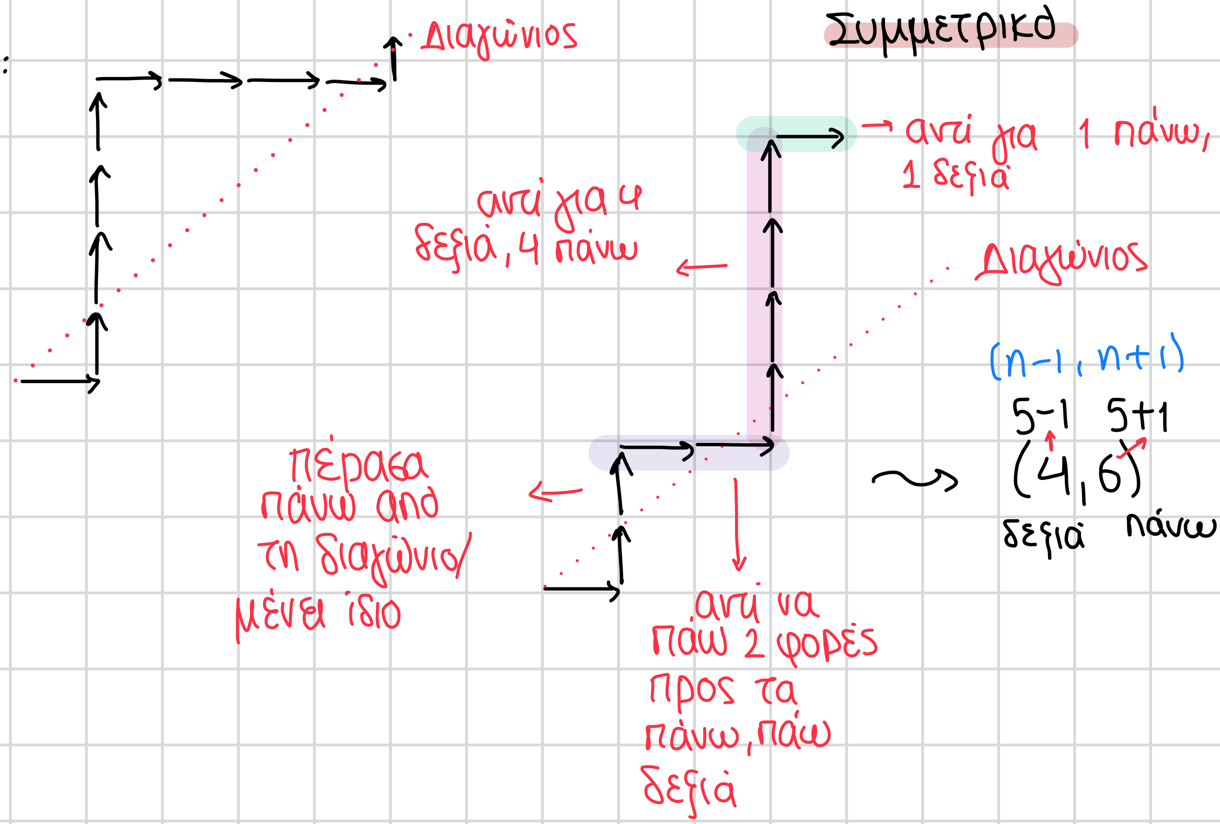
Παράδειγμα:

(n,n)

$(5,5)$

δεξιά πάνω



$(n-1, n+1)$

$5-1 \quad 5+1$

$(4, 6)$

δεξιά πάνω

Αναδρομικός τύπος:

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$$

Διάλεξη 5

15/10/24

$$\boxed{\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}}$$

ΑΠΟΔ.

Α' τρόπος:

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k$$

$$\parallel$$

$$(1+x)^m (1+x)^n = \left[\sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} x^v\right]\left[\sum_{\mu=0}^{n} \binom{n}{\mu} x^\mu\right]$$

πολυώνυμα

ποιός είναι ο συντελεστής του x^k ?

$$= \sum_{\nu+\mu=k} \underbrace{\binom{m}{\nu}\binom{n}{\mu}}_{\text{ο συντελεστής}} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{m}{\nu}\binom{n}{k-\nu}$$

$0 \le \nu \le m$
$0 \le \mu \le n$

Τύπος πολ/μου πολυωνύμων:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{n} b_\mu x^\mu\right) = \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} a_\nu b_\mu x^{\nu+\mu}$$

Β' τρόπος (Συνδιαστικός)

S υποσύνολο με n το πλήθος στοιχεία
T — // — m — // —
} $S \cap T = \emptyset$

- $\binom{m+n}{k}$ → Το πλήθος των υποσυνόλων του $S \cup T$ με k στοιχεία.
  ↓
  $\underbrace{\text{πως μπορεί να γίνει αυτό;}}$

0	στοιχεία από το S →	k	στοιχεία από το T
1	στοιχείο " S →	k-1	— " — T
2	στοιχεία " S →	k-2	— // — T
...	⋮	...	
k	— // — S →	0	— // — T

Στη θέση i: $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ τρόποι διαλογής.
$0 \le i \le k$

$$\boxed{\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}}$$

α) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$ ⇝ το ίδιο για $m=n$

β) $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{1+n}\binom{2n}{n}$$

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k} = \frac{n!}{(k+1)\,k!(n-k)!}\binom{n-1}{k} =$$

$$\frac{(n+1)n!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}\binom{n-1}{k}$$

κοιτάζω τον πάνω τύπο!

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{n-i}\binom{n-1}{i} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{n-i}\binom{n-1}{i}$$

γιατί $\binom{n-1}{n}=0$ και δεν συνεισφέρει καθόλου.

$1 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m-1}{k-1} \rightsquigarrow$$

Με επαγωγή:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\underbrace{\sum_{m=k}^{n} (x+1)^{m-1}} = (x+1)^{k-1} \sum_{m=0}^{n-k} (x+1)^{m}$$

$$= (x+1)^{k-1} \left(\frac{(x+1)^{n-k-1} - 1}{x} \right)$$

Αθροισμα όρων γεωμ. προόδου:

$\rightsquigarrow 1+y+\dots+y^{e} = \dfrac{y^{e-1}-1}{y-1}$

Αυτό το πολυώνυμο είναι: $\displaystyle\sum_{m=k}^{n} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{n} x^{v}$

Ο συντελεστής του x^k είναι $\binom{n}{k+1}$.

— " — x^{k-1} —"— $\binom{n}{k}$

$$\sum_{m=k}^{n} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v} x^{v}$$

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m-1}{k-1} x^{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Συνδιαστικός Τρόπος:

$$\binom{n}{k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m-1}{k-1}$$

↳ το πλήθος των τρόπων που διαλέγουμε k στοιχεία από n.

Αν πάρουμε $k \le m \le n$ $\forall m$, υπάρχουν υποσύνολα του $[n]$ με k στοιχεία και το m μέγιστο.

Δηλαδή αν $\#T = k$ $\quad m = \max T$

$T \subset [n] \quad k \le m$

Πόσα είναι τα υποσύνολα με k στοιχεία και m μέγιστο;

$: \binom{m-1}{k-1}$.

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{2n-k-1}{n-1}$$ ⇝ Να το υπολογίσω.

θέτω $\lambda = n-k$

$\Rightarrow k = n - \lambda$

αλλαγή μεταβλητής.

Βασική αρχή: Αν $0 \le k \le n$ διατρέχει τις τιμές $0 \leftrightarrow n$ το ίδιο κάνει και το λ

$$= \sum_{\lambda=0}^{n} (n-\lambda) \binom{2n-n+\lambda-1}{n-1}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n} (n-\lambda) \binom{n+\lambda-1}{n-1}$$

$$\rightsquigarrow (n-k)\binom{n+k-1}{n-1} = n\binom{n+k-1}{n-1} - k\binom{n+k-1}{n-1} =$$

$$= n\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,(n+k-1-n+1)!} - \frac{k\,(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} =$$

$$= n\binom{n+k-1}{n-1} - n\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$

$$= n\binom{n+k-1}{n-1} - n\binom{n+k-1}{n} \quad (*)$$

Αθροίζω τον αριθμητή — $\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n-k-1}{n-1}$

άρα πρέπει με κάποιο τρόπο να εφαρμόσω αυτή από πάνω: $\binom{n}{k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m-1}{k-1}$

Αυτό που θα πάρω: $n\binom{2n}{n} - n\binom{2n}{n+1}$

Αυτό που πρέπει να αναγνωρίσω:

$$\binom{n}{k} = \sum_{m=n}^{2n} \binom{m-1}{n-1}$$

Εδώ έχω να αθροίσω $n+k$: $0 \leq k \leq n$, $n \leq n+k = m \leq 2n$

$$(*) = n\binom{n+k-1}{n-1} - n\binom{n+k-1}{n}$$

(**) το ονομάζω m και έχω την ταυτότητα που θέλω

$$\rightsquigarrow \quad n\binom{2n}{n} - n\binom{2n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε 2 τεχνικές:

1. Όταν έχω άθροισμα από $0 \leftrightarrow n$ μπορώ να κάνω αλλαγή μεταβλητής και αντί να αθροίσω στο k, να αθροίσω στο $n-k$.

2. Αλλαγή μεταβλητής στο $n+k=m$ (**)

● Δείξε ότι:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m}$$

είχαμε δεί ότι $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$ αλλά εδώ αθροίζω μέχρι το m!

<u>Επαγωγή</u>: $m=0$: $(-1)^0\binom{n}{0}=(-1)^0\binom{n-1}{0}$

$$1=1$$

$$\leadsto \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{n}{k}}_{\text{επαγωγική υπόθεση για } m-1:}+(-1)^m\binom{n}{m}$$

$$=(-1)^{m-1}\binom{n-1}{m-1}+(-1)^m\binom{n}{m}$$

$$=(-1)^{m-1}\left(\binom{n-1}{m-1}-\binom{n}{m}\right)$$

$$=(-1)^m\binom{n-1}{m}$$

γιατί ισχυει η αναδρ/κή σχέση :

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$$

<u>Β' τρόπος</u>

$$(1-x)^n x^{m-k}=\sum_{v=0}^{n}(-1)^v\binom{n}{v}x^{v+m-k}$$

ο συντελεστής του όρου x^m είναι $(-1)^k\binom{n}{k}$

$\sum_{k=0}^{n}(1-x)^n x^{m-k}$ $\leadsto$ ο συντελεστής του x^m είναι

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}$$

$$= (1-x)^n \sum_{k=0}^{m} x^{m-k} = (1-x)^n \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$$

γεωμετρική πρόοδος

$$= (1-x)^{n-1}(1-x^{m+1})$$

$$= (1-x)^{n-1} - \underbrace{x^{m+1} p(x)}$$

συντελεστής x^m: $(-1)^m \binom{n-1}{m}$

Δεν συνεισφέρει στο x^m