• Να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 =$$

· <u>Α τρόπος</u>: $\boxed{(x+1)^n (x-1)^n = (x^2-1)^n}$

$$(x+1)^n (x-1)^n = \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} x^j\right)$$ → πολυώνυμο βαθμού 2n

Ο συντελεστής του x^n: $\sum_{\substack{i+j=n \\ i=0}}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-j} \binom{n}{j}$

$(j = n-i)$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-(n-i)} \binom{n}{n-i}$$

SOS: $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 (-1)^i$$ ⇝ αυτό που θέλουμε

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{2k}$$

$\begin{cases} n \text{ περιττός, δεν έχει όρο } x^n \\ n \text{ άρτιος } \quad x^n = x^{2\,n/2} \end{cases}$

του x^n ο συντελεστής: $\binom{n}{n/2} (-1)^{n/2}$

· Άρα

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0 \\ \binom{n}{n/2} (-1)^{n/2} \end{cases}$$

B' τρόπος (Συνδιαστικός) n άντρες και n γυναίκες, παντρεμένοι μεταξύ τους σε ζευγάρια:

$$A \ni a \longleftrightarrow \gamma \in \Gamma$$

Επιτροπές από n άτομα

Μια επιτροπή θα ονομάζεται $\begin{cases} \text{άρτια, αν: άρτιο πλήθος} \\ \text{περιττή, αν: περιττό πλήθος} \end{cases}$

Το πλήθος των άρτιων επιτροπών:

$$\underset{\text{καμια γυναίκα}}{\binom{n}{0}}\binom{n}{n} + \underbrace{\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}} + \underbrace{\binom{n}{4}\binom{n}{n-4}} + \dots$$

συμπληρωματικά: $\binom{n}{n-i}\binom{n}{i}$

$$= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{4}^2 + \dots$$

Το πλήθος των περιττών επιτροπών:

$$\binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{3}\binom{n}{n-3} + \dots = \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{3}^2 + \binom{n}{5}^2 + \dots$$

ζευγάρια τα αριθμούμε $(1, \dots, n)$

Υπάρχουν επιτροπές που αποτελούνται μόνο από ζευγάρια;

Ναι, αν n άρτιος → πόσες είναι αυτές; ~ $\binom{n}{n/2}$

αν n περιττός, δεν γίνεται.

Τρικ: Παίρνω μια επιτροπή στην οποία δεν είναι όλοι ζευγάρια

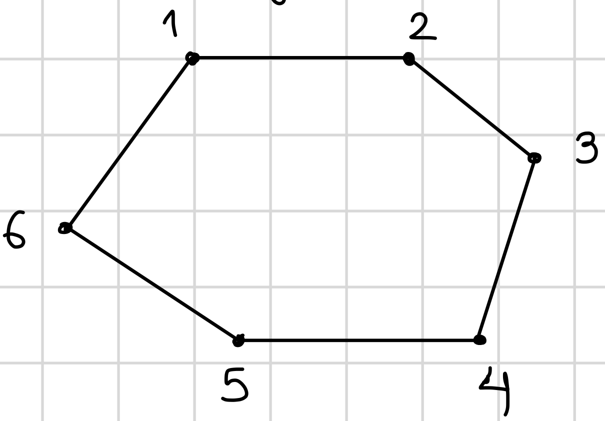
$$E = (\gamma, a, \gamma', \gamma'', \dots)$$

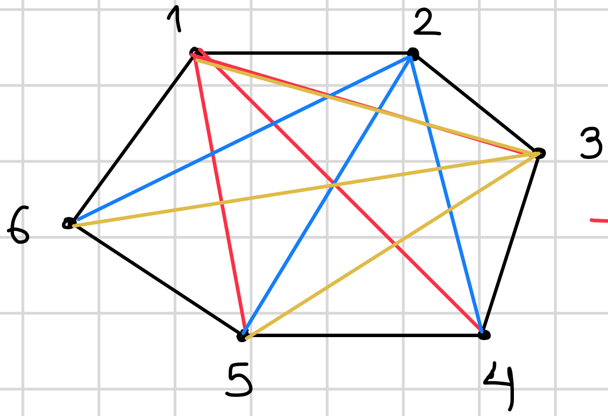
Βρίσκω τον άντρα ή την γυναίκα με τον μικρότερο αριθμό ζεύγους.

→ $(\gamma, \gamma_3, \ldots)$

(καλύτερα να δείτε την εξήγηση στο delos, Μέρος 1, 17/10/24, κοντά στην μισή ώρα ♡)

Πόσες διαγωνίους έχει ένα κυρτό πολύγωνο με n κορυφές.





→ Το 1 μπορεί να συνδεθεί με n-3
Το 2 — " — n-3
Το 3 — " — n-3
⋮

n επιλογές για κορυφές
κάθε επιλογή δίνει (n-3) διαγωνίους

$$N \ni \frac{n(n-3)}{2}$$

γιατί διαίρεσα με το 2; γιατί η διαγώνιος $1 \to 3$ είναι ίδια με την $3 \to 1$ (διπλομέτρηση)

$\{A, B, \Gamma, \Delta\}$, λέξεις με 5 γράμματα

ΒΑΑΔΒ
ΓΑΔΓΒ ...

Πόσες λέξεις περιέχουν τουλάχιστον ένα Α;

Όλες οι λέξεις είναι 4^5

$\underset{4\gamma\rho}{\_\_}\ \underset{4\gamma\rho}{\_\_}\ \underset{4\gamma\rho}{\_\_}\ \underset{4\gamma\rho}{\_\_}\ \underset{4\gamma\rho}{\_\_} \to 4^5$ δυνατότητες.

Οι λέξεις χωρίς Α: 3^5

Άρα απάντηση: $4^5 - 3^5$

Πόσες από αυτές περιέχουν το πολύ ένα Α;

$$3^5 + 5 \cdot 3^4$$

κανένα Α

Ακριβώς ένα Α!

5 θέσεις για το Α $\cdot$ 3^4 τα υπόλοιπα.

Πόσες από αυτές δεν περιέχουν 2 διαδοχικά Α;
(το πιο σύνθετο)

$$\underbrace{3^5}_{\text{κανένα Α}} + \underbrace{5 \cdot 3^4}_{\text{ένα Α}} + \underbrace{6 \cdot 3^3}_{\text{δύο Α}} + \underbrace{3^2}_{\text{τρία Α}}$$

A	∘	A	∘	A

3^2 δυνατότητες να επιλεχθούν

A	·	A	·	·

·	A	·	A	·

A	·	·	A	·

·	A	·	·	A

A	·	·	·	A

·	·	A	·	A

6 τρόποι για τα δύο Α $\times$ 3^3 τρόποι για τα υπόλοιπα γράμματα!

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i}$$ ⇝ Άσκηση.

Τρόπος 1:

$$\frac{n!}{i!\cancel{(n-i)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-i)!}}{j!(n-i-j)!} \qquad \frac{n!}{j!\cancel{(n-j)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-j)!}}{i!(n-j-i)!}$$

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \frac{n!}{j!i!(n-j-i)!} \checkmark$$

Τρόπος 2:

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i}$$ → διαλέγω πρώτα το T.

Το πλήθος των τρόπων να διαλέξω δύο ξένα υποσύνολα του $[n]$
$\#S=i$
$\#T=j$

Εδώ διαλέγω πρώτα το S και σε ότι περισσέψει το T

·Άσκηση

$0 \leq k \leq n-1$

Δείξτε ότι $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1} \Leftrightarrow k \leq \frac{n-1}{2}$

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{k+1}{n-k} \leq 1 \;?$$

$$\Updownarrow$$

$$k+1 \leq n-k$$

$$\Updownarrow$$

$$2k \leq n-1$$

$$\Updownarrow$$

$$k \leq \frac{n-1}{2}$$

⇝ Δείξτε ότι

$$\binom{n}{0} \leq \binom{n}{1} \leq \dots \leq \binom{n}{[(n+1)/2]}$$

⇝ Πότε $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$; $\Rightarrow$ όταν $k = \frac{n-1}{2}$, n περιττός.

·Άσκηση:

(A) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

(απαριθμώντας τα υποσύνολα του $[n]$ με 2 τρόπους
μη κενά

(B) αποδείξτε και ότι $(a-1)(1+\dots+a^{n-1}) = a^n - 1$

ΛΥΣΗ

A) Τα υποσύνολα του $[n] = 2^n$

Τα μη κενά υποσύνολα είναι $2^n - 1$

Για κάθε κ : $1 \leq k \leq n$ θεωρούμε τα υποσύνολα του n με μέγιστο στοιχείο το k.

↓

Έχουμε ξανακάνει το μέτρημα:

πχλ $\underbrace{1,2,3,4,5,6}, 7.$

αν $k=n$: $S \cup \{7\}$

2^{n-1} → το άθροισμα

αν $k=n-1$: $S \cup \{6\}$

2^{n-2}

$+$

$\vdots$

$+$

1

B) Απαριθμούμε τα μη-κενά υποσύνολα του $[n]$, ώστε κάθε στοιχείο χρωματίζεται με τα χρώματα $1, 2, \ldots, a-1$.

· Έστω ένα τέτοιο σύνολο όπου το μέγιστο είναι το k, όπως πριν.

Το μέγιστο στοιχείο το χρωματίζω με $a-1$ τρόπους
Τα $k-1$ στοιχεία που περισσεύουν τα χρωματίζω με a τρόπους
· Ένα στοιχείο χρωματισμένο με 0, αν δεν ανήκει στο σύνολο.

↓

πχ) $k=3$:
$a=3$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$\{0,0,0\} \to \cancel{\varnothing} \quad 1 \quad 1$ → Βάφω με 1, 1

$\{0,1,1\} \to \{2,3\}$

$\{0,1,2\} \to \{2,3\} \to 1 \quad 2$ → Βάφω με 1, 2.

$\{0,2,1\}$

$\{0,2,2\}$

$\vdots$