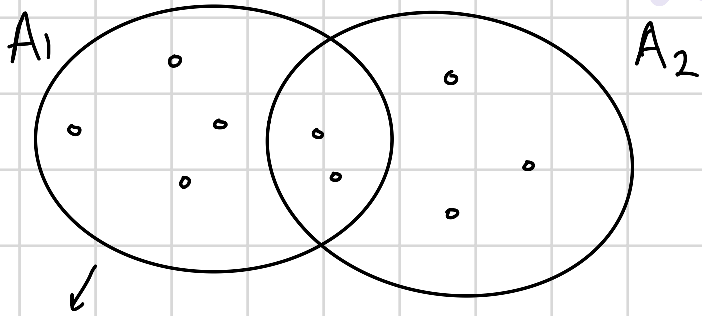
Διάλεξη 7

Νέο Κεφάλαιο, το οποίο έχει να κάνει με το εξής:

· Έχουμε ένα σύνολο $\underline{\Omega}$, όπου μέσα του υπάρχουν υποσύνολα $A_1, \dots, A_n$, τα οποία όμως δεν έχουν κατά ανάγκη κενή τομή.

<u>Πρόβλημα</u>: $\#\left(\underline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = ;$

$\rightsquigarrow \ \#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#(A_2 \setminus A_1 \cap A_2)$



$A_1 \cup (A_2 \setminus A_1 \cap A_2)$

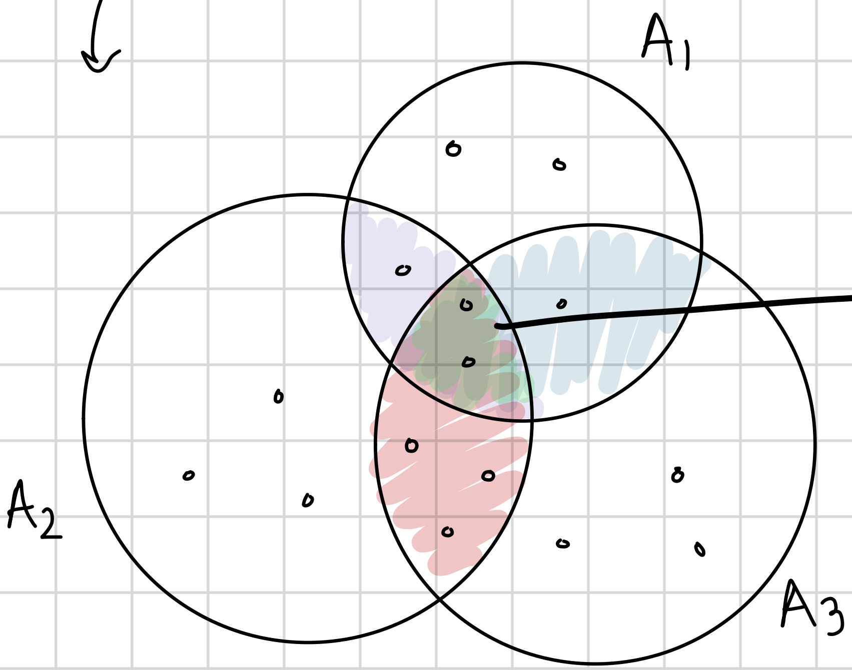
ξένη ένωση

$= \#A_1 + \#A_2 - \#A_1 \cap A_2$

Αφαιρώ αυτά που έχουν μετρηθεί 2 φορές

Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

∘ $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3$
$\quad - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_3)$
$\quad + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$



Αφαιρώντας τις μωβ-μπλέ-κόκκινες τομές, η πράσινη τομή $(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ αφαιρείται 3 φορές

$\Downarrow$

Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

Θα αποδείξουμε έναν γενικό – συνδυαστικό τύπο γι' αυτό:

$$\boxed{\#\left(\underline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})}$$

$$= \sum_{I \subset [n]} (-1)^{\#I} \# \bigcap_{i \in I} A_i$$

διατρέχουμε τα 2^n υποσύνολα του $[n]$.

~> Πρώτα το αποδείξουμε να δούμε μερικές εφαρμογές:

$\underline{\Omega} = \{1, \dots, 3000\}$

α) Πόσοι είναι οι αριθμοί που δεν διαιρούνται με 3;

β) ——— // ——— ούτε με 3, ούτε με 4;

γ) ——— // ——— ούτε με 3, ούτε 4, ούτε 5;

Τι μπορώ να κάνω:

A_1 : είναι οι αριθμοί που διαιρούνται με 3
A_2 : ——— " ——— με 4
A_3 : ——— " ——— με 5.

$\#A_1 = \frac{3000}{3} = 1000.$ $\xrightarrow{\text{γιατί;}}$ $3|n \Leftrightarrow n = 3k$

$1 \leq n \leq 3.000 \Rightarrow$

$1 \leq 3k \leq 3.000 \Rightarrow$

$\frac{1}{3} \leq k \leq 1.000$

↳ ίδιο με
$1 \leq k \leq 1000$
αφού $k \in \mathbb{N}$!

$\#A_2 = \frac{3000}{4} = 750$

$\#A_3 = \frac{3.000}{5} = 600$

α) $\#(\Omega \setminus A_1) = 2000 = 3000 - 1000$

$A_1 \cap A_2$ = οι αριθμοί που διαιρούνται και με 3 και με 4
= ——— " ——— με 12.

- $\#(A_1 \cap A_2) = \frac{3.000}{12} = 250$
- $\#(A_1 \cap A_3) = \frac{3000}{15} = 200$
- $\#(A_2 \cap A_3) = \frac{3000}{20} = 150$
- $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3000}{60} = 50$

$\rightsquigarrow \#(\Omega \setminus (A_1 \cup A_2)) = \underbrace{3000}_{\#\Omega} - \underbrace{1000}_{\#A_1} - \underbrace{750}_{\#A_2} + \underbrace{250}_{\#A_1 \cap A_2} = 1500$

$$\sum_{I \subset [2]} (-1)^{\#I} \# \bigcap_{i \in I} A_i$$

Υποσύνολα: $I \subset [2] \to \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \right\}$

$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \underline{\Omega}$

Σημείωση!

γ) $\#(\underline{\Omega} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)) = 3000 - \overset{1000}{\#A_1} - \overset{750}{\#A_2} - \overset{600}{\#A_3}$
$+ \#A_1 \cap A_2 + \#A_2 \cap A_3 + \#A_1 \cap A_3$
$- \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \ldots = 1200$

Πρόβλημα: Θεωρούμε τις κυκλικές αναδιατάξεις 8 ατόμων που σχηματίζουν 4 ζευγάρια: $\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \{a_3, b_3\}, \{a_4, b_4\}$

Αλλαγή αν καθίσουν όλοι μια θέση πιο δίπλα είναι η ίδια διάταξη! (το έχουμε ξαναδεί)

Σε πόσες από αυτές δεν κάθεται ένα ζευγάρι δίπλα-δίπλα;

A_i: το υποσύνολο των κυκλικών ο a_i κάθεται δίπλα στον b_i.

$\#\underline{\Omega} = 7!$

ΘΥΜΑΜΑΙ:

Αναδιατάξεις $[n]$: $n!$
Κυκλικές — " — : $(n-1)!$

$\#A_i = 2 \cdot 6!$ ⇝ πονηρό

Θα θεωρήσω το ζευγάρι μια οντότητα!

$a_i b_i$ ή $b_i a_i$

2 τρόποι να κάτσει το ζευγάρι · 6! τρόποι να αναδιατάξω κυκλικά 7 οντότητες

$\rightsquigarrow \#(A_i \cap A_j) = 2^2 \cdot 5!$ $\rightsquigarrow$ 2 ζευγάρια κάθονται μαζί $\Rightarrow$ 6 οντότητες.

$b_i a_i$ ή $a_i b_i$, $b_j a_j$ ή $a_j b_j$

$$\underbrace{\underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} \cdot \quad}_{5!}$$

Αντίστοιχα:

$\rightsquigarrow \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 2^3 \cdot 4!$

$\rightsquigarrow \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 2^4 \cdot 3!$

·Άρα το ζητούμενο:

$$7! - 4 \cdot 2 \cdot 6! + 6 \cdot 2^2 \cdot 5! - 4 \cdot 2^3 4! + 2^4 \cdot 3! = \underline{1488}$$

#º

γιατί 4; γιατί 4 είναι τα δυσύνολα / οι τρόποι να διαλέξω 2 and 4

οι τρόποι να διαλέξω 3 and 4

Τι θέλω: να μην κάτσουν μαζί: $\#(\Omega - \cup A_i)$.

↳ Αυτά τα έχουμε και στις πιθανότητες.

> **Δικό μου note:**
>
> Ωραίες ασκήσεις και προβλήματα συνδιαστικής σαν αυτά υπάρχουν και στο βιβλίο πιθανοτήτων του Ross! :)

Τώρα η απόδειξη: 

$$\#\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{I \subset [n]} (-1)^{\#I} \, \# \bigcap_{i \in I} A_i$$ → Παρατηρήσεις

- $\emptyset \subset [n]$

⤳ Τι σημαίνει $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I : x \in A_i$ ← Να ανήκει σε όλα τα A_i

" $x \in \bigcap_{i \in \emptyset} A_i \iff \forall i \in \emptyset : x \in A_i$

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \Omega$$

Απόδειξη ①

$$X_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A_i \\ 0 & \text{αν } x \notin A_i \end{cases}$$ → (χαρακτηριστική συνάρτηση του A_i)

Παρατηρώ ότι: $$\prod_{i=1}^{n} (1 - X_i(x)) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\ 1, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για να είναι 0, αρκεί ένας παράγοντας να είναι 0, άρα κάποιο $X_i(x) = 1$, άρα κάποιο $x \in$ σε κάποιο A_i.

· Έχουμε αποδείξει με επαγωγή ότι:

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_n+y_n)=\sum_{S\subset[n]} x_S\, y_{\bar{S}}$$

όπου $x_S=\prod_{i\in S} x_i$ → Το κρατάω κι' αυτό.

$y_{\bar{S}}=\prod_{i\notin S} y_i$

$$\rightsquigarrow \#\left(\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{x\in\Omega}\underbrace{\prod_{i=1}^{n}(1-\chi_i(x))}$$

αν το $x\in$ στην ένωση αυτό είναι 0 άρα δεν αθροίζω τπτ αν ανήκει, είναι 1.

· Άρα έρχομαι και αθροίζω στο Ω μια μονάδα $\forall x\notin \bigcup A_i$

· Άρα μετράω τον $\#\left(\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

· Έτσι τώρα θα χρησιμοποιήσω την συνδιαστική ταυτότητα:

$$\sum_{x\in\Omega}\sum_{I\in[n]}(-1)^{\# I}\prod_{i\in I}\chi_i(x).$$ → το ίδιο με αυτό που έχω πάνω

$$=\sum_{I\in[n]}(-1)^{\# I}\underbrace{\sum_{x\in\Omega}\prod_{i\in I}\chi_i(x)}$$ $\to = \begin{cases}1, & x\in\bigcap_{i\in I}A_i\\ 0, & x\notin\bigcap_{i\in I}A_i\end{cases}$

||

$\prod$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της τομής $\leftarrow \chi_{\bigcap_{i\in I} A_i}(x)$

$$\Rightarrow \sum_{x\in\Omega}\prod_{i\in I}\chi_i(x) = \#\bigcap_{i\in I} A_i .$$ ✓

B' τρόπος

$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & x\in\bigcap_{i\in I} A_i \\ 0 & \text{διαφορετικά.}\end{cases}$	$\#\bigcap_{i\in I} A_i = \sum_{x\in\Omega}\chi_I(x)$
$\#\left(\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \underbrace{\sum_{I\subset[n]}(-1)^{\#I}\,\#\bigcap_{i\in I} A_i}_{B}$	

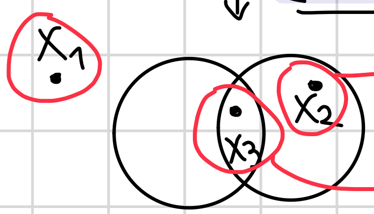
$$\Rightarrow B = \sum_{I\subset[n]}(-1)^{\#I}\sum_{x\in\Omega}\chi_I(x)$$

Ονομάζω $\quad C(x) = \sum_{I\subset[n]}(-1)^{\#I}\chi_I(x).$

- $x\in\Omega$. Έστω ότι το x ανήκει σε m-το πλήθος σύνολα από τα $A_1,\dots,A_n$, δηλαδή:
  $x\in(A_{i_1}, A_{i_2},\dots,A_{i_m})$, και $0\le m\le n$

$\downarrow$ Σχηματικά:

δεν ανήκει σε κανένα



ανήκει σε 1

ανήκει σε 2!

Τότε ανήκει σε $\binom{m}{2}$ σύνολα $A_i \cap A_j$

—— " —— $\binom{m}{3}$ σύνολα $A_i \cap A_j \cap A_k$

Δηλαδή $X_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } \binom{m}{k} \text{ k-υποσύνολα του } [n] \\ 0 & \text{για τα υπόλοιπα.} \end{cases}$

Άρα $C(x) = \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} \cdots + (-1)^m \binom{m}{m}$

$$= \begin{cases} 0, & m \geq 1 \\ 1, & m = 0 \end{cases}$$

Άρα

$$B = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \notin \text{ σε κανένα } A_1, \ldots, A_n \\ 0, & \text{αν το } x \in \text{ σε } m \geq 1 \text{ σύνολα} \end{cases} = C(x)$$

$\Downarrow$

$C(x) = X_{\Omega \setminus A_1 \cup \ldots \cup A_n}(x)$

$\sum C(x) = \#(\Omega \setminus A_1 \cup \ldots \cup A_n)$.

<u>Παράδειγμα</u>: $\#\Omega = 1$

$A_i = \Omega$ για κάθε $i \in [n]$

$$\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \begin{cases} \Omega & n = 0 \\ \emptyset & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{I \subset [n]} (-1)^{\#I} \# \bigcap_{i \in I} A_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

⤳ $\underline{\Omega}$ είναι το σύνολο των n υποσυνόλων του $[2n] = \{1, \ldots, 2n\}$.

$A_i = \{ S \in \underline{\Omega} : i \in S \}$ $i \in [n]$

Τότε $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ είναι το μοναδικό στοιχείο του $(\underline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i)$.

Αν έχω k-υποσύνολο του $[n]$, η τομή $\bigcap_{i \in I} A_i$ αποτελείται από όλα τα n υποσύνολα του $[2n]$ που περιέχουν το i.

Άρα $\# \bigcap_{i \in I} A_i = \binom{2n-k}{n-k} = \binom{2n-k}{n}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} = 1$$