Διάλεξη 8

24/10/24

$$\boxed{\#\left(\underline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{I \cup [n]} (-1)^{\#I} \# \bigcap_{i \in I} A_i}$$

Εφαρμογές

⇝ Επί συναρτήσεις $f:[n] \to [n]$

$A \xrightarrow{f} B$

Επί: για κάθε $y \in B$ $\exists x \in A$ με $f(x) = y$

$\underline{\Omega}$: $f:[m] \longrightarrow [n]$ όλες οι συναρτήσεις

- $A_i = \{ f \in \underline{\Omega}$ ώστε $\nexists x$ με $f(x) = i \}$

ή αλλιώς: $f([m]) \subset [n] \setminus \{i\}$.

- $\# \underline{\Omega} = n^m$ $\xrightarrow{\text{γιατί;}}$
  - $f(1) \to n$ επιλογές
  - $f(2) \to n$ επιλογές
  - $\vdots$
  - $f(n) \to n$ επιλογές

  $\Big\}$ n^m επιλογές

- $\# A_i = (n-1)^m$ $\xrightarrow{\text{γιατί;}}$ Όμοια με πάνω, άφησα το i απέξω.

- $\#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = (n-k)^m$

  $\Downarrow$

  $f:[m] \to [n]$

  $f(m) \subset [n] \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$

- $\#\left(\underline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ ⇝ Το σύνολο των επί συναρτήσεων.

$$= \sum_{I \subset [n]} (-1)^{\#I} \# \bigcap_{i \in I} A_i$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

για $k=0$: $\#\underline{O} = n^m$

για $k=1$: $(-1)(\underbrace{\#A_1 + \#A_2 + \ldots + \#A_n}_{\binom{n}{1}})$

για $k=2$: $\#A_1 \cap A_2 + \#A_1 \cap A_3 \cdots \hookrightarrow (n-2)^m \binom{n}{2}$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = \begin{cases} 0, & \text{αν } m<n \\ n!, & \text{αν } m=n \end{cases}$$

$\binom{n}{k}$ ίδιο $\binom{n}{n-k}$

$f[m] \to [n]$ Αν $m<n$: Δεν υπάρχουν επί συναρτήσεις!
Αν $m=n$: Επί $[n] \to [n] \Rightarrow$ 1-1.

$\boxed{\text{Επί συναρτήσεις = αναδιατάξεις}}$

Συνάρτηση Euler

$n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ ⇝ ανάλυση σε πρώτους παράγοντες

$\boxed{\varphi(n) = \#\{k : 1 \leq k \leq n,\ \text{ΜΚΔ}(k,n) = 1\}}$

$\text{ΜΚΔ}(k,n) = 1 \Rightarrow$ κανένα p_i δεν διαιρεί το k.

Θέλουμε να αποδείξουμε: $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ (*)

$\underline{\Omega} = [n] = \{1,2,\dots,n\}$.

$A_i = \{k \in [n],\ p_i \mid k\}$

$\# A_i = \frac{n}{p_i}$ $\rightsquigarrow$ γιατί;

$k \in A_i \Leftrightarrow k = p_i \cdot \lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$

$1 \leq k \leq n$

$1 \leq p_i \lambda \leq n$

$\frac{1}{p_i} \leq \lambda \leq \frac{n}{p_i} \overset{\lambda \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow}$

$1 \leq \lambda \leq \frac{n}{p_i}$

- $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r} = \{k \in [n],\ p_{i_1} \cdots p_{i_r} \mid k\}$

$\Rightarrow \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_r}}$.

Θυμάμαι... (*) (**)

$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\dots(x_r+y_r) = \sum_{S \subseteq [r]} x_S\, y_{\bar{S}}$ → θα τον χρησιμοποιήσω για να αποδείξω το πάνω;

$$\varphi(n) = \#\Big(\underset{[n]}{\underline{\Omega}} \setminus \bigcup_{i=1}^{s} A_i\Big) = \sum_{I \subset [s]} (-1)^{\# I}\, \# \bigcap_{i \in I} A_i$$

$$= \sum_{I \in [s]} (-1)^{\# I} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}$$

$I = \{i_1, \dots, i_s\}$

Θα πάω στον (*) και θα πω:

- $x_i = 1$
- $y_i = -\frac{1}{p_i}$ και θα χρησιμοποιήσω την (**)

και: $\displaystyle\sum_{\substack{S\in[s]\\ \{i_1,\dots,i_k\}=S}} (-1)^{\#S} \cdot \frac{1^{y_i - \frac{1}{p_i}}}{p_{i_1}\cdots p_{i_k}}$

Δ.δ.ο αν $\text{ΜΚΔ}(m, m')=1 \Rightarrow \underset{\substack{\|}}{\varphi(mm')} = \varphi(m)\cdot\varphi(m')$

$m = p_1^{a_1}\dots p_s^{a_s}$

$m' = q_1^{e_1}\dots q_r^{e_r}$

$$\varphi(mm') = mm' \underbrace{\prod_{i=1}^{s}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)}_{\varphi(m)} \cdot \underbrace{\prod_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{q_j}\right)}_{\varphi(m')} \longrightarrow \{p_1,\dots,p_s\}\cap\{q_1,\dots,q_r\} = \emptyset$$

- $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)$

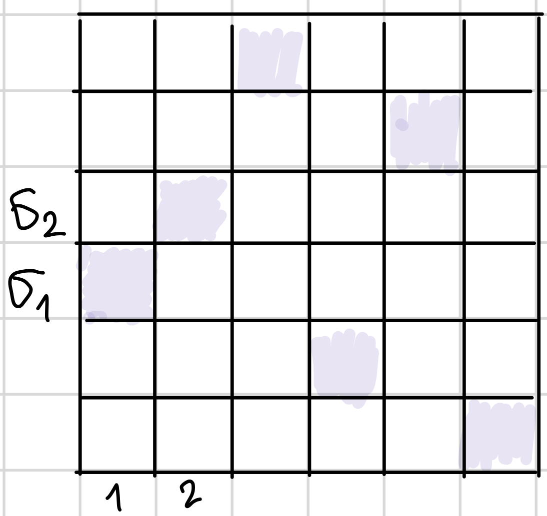
Αναδιατάξεις χωρίς σταθερά σημεία

$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ μια αναδιάταξη του $[n]$.

$\{1,2,3,4\} \to \{2,4,3,1\}$ ⊛

↓

$\left.\begin{array}{l} \sigma: [n] \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} [n] \\ \quad\ \ \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \\ \quad\ \ i \quad \longrightarrow \quad \sigma_i \end{array}\right\}$ μεταθέσεις →

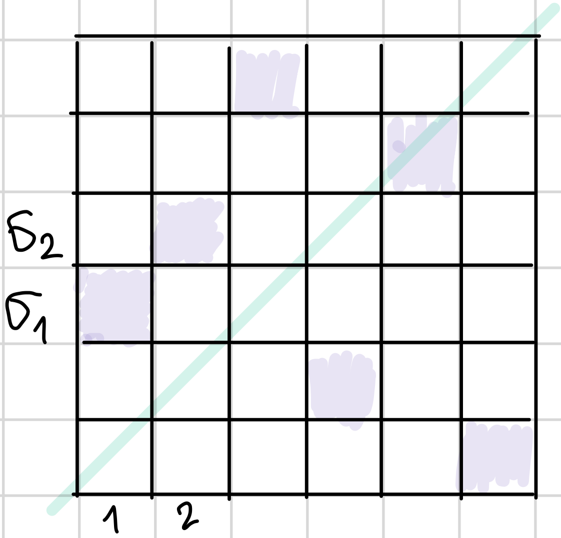


Το ίδιο με τους πύργους/σκακιέρα

$\{1,2,3,4\} \to \{2,4,3,1\}$ ⇝ έχει σταθερό σημείο.

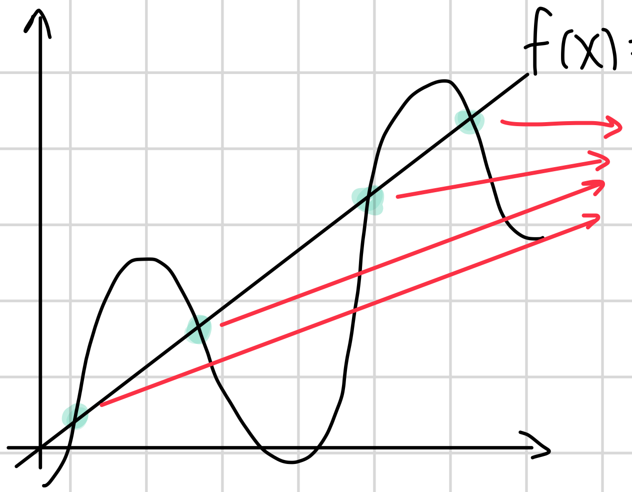
θα λέμε ότι η σ έχει σταθερό σημείο αν $\sigma_i = i$

πχ) $\{1,2,3,4\} \to \{4,1,2,3\}$ δεν έχει σταθερό σημείο.



έχει σ.σ.
(τα πιόνια στη διαγώνιο)

πχ)



πχ) $\mathbb{I}_n$ ⇝ ταυτοτικός πίνακας

πάρε μετάθεση σ και άλλαξε τις γραμμές του $\mathbb{I}_n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αυτή που έχω πάνω ⊛

↳ Για ποιές μεταθέσεις το $tr(\sigma I_n) \neq 0$

θυμάμαι: $tr =$ το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου

$D_0 = 1$
$D_n =$ το πλήθος των αναδιατάξεων $[n] \to [n]$ χωρίς σταθερά σημεία.
$\underline{\Omega}$: όλες οι αναδιατάξεις, $\#\underline{\Omega} = n!$

- $A_i = \{ \sigma \in \underline{\Omega} : \sigma(i) = i \}$ → οι αναδιατάξεις με ένα Σ.Σ.

⤳ θέλω να μετρήσω : $\#\{ \underline{\Omega} \setminus A_1 \cup \dots \cup A_n \}$

$\# A_i = (n-1)!$
$\# A_{i_1} \cap A_{i_2} = (n-2)!$
$\vdots$
$\# A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = (n-k)!$

$$\Rightarrow \boxed{D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!}$$

→ Το πλήθος των συνόλων τα οποία τέμνονται.

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! =$$

$$= \boxed{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \circ\ D_n = n D_{n-1} + (-1)^n \quad , \ n \geq 1 \\ \circ\ D_n = (n-1)\left(D_{n-1} + D_{n-2}\right) \quad , \ n \geq 2 \end{array}}$$

$$\rightsquigarrow D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$= \underbrace{n(n-1)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)}_{D_{n-1}} + (-1)^n \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}} \quad \checkmark$$

$$\rightsquigarrow (n-1)\left(D_{n-1} + D_{n-2}\right) =$$

$$n D_{n-1} - D_{n-1} + (n-1) D_{n-2} =$$

ο πρώτος τύπος για $n = n-1$.

$$n D_{n-1} \underbrace{-}\, (-1)^{n-1} = D_n \quad \checkmark$$

$$+(-1)(-1)^{n-1} = +(-1)^n$$

πρώτος τύπος πάλι!

$$\circ\ \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1}} \qquad \rightsquigarrow e^x = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\rightsquigarrow e^{-1} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

Η πιθανότητα να έχω μεταθέσεις χωρίς σταθερά σημεία τείνει στο e^{-1}!

• $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ θεωρούμε λέξεις με 5 γράμματα.

πχ) $\Delta BBAA$

α) Πόσες από αυτές περιέχουν τουλάχιστον ένα A και τουλάχιστον ένα B;

Ω = όλες οι λέξεις, $\#\Omega = 4^5 = 1024$

A_1 = λέξεις χωρίς A

A_2 = — " — B

Άρα ζητάω: $\#(\Omega \setminus (A_1 \cup A_2))$

$\#A_1 = \#A_2 = 3^5 = 243$

$\#(A_1 \cap A_2) = 2^5 = 32$

: "Μη σας βάλω κάτι τέτοιο και δεν το γράψετε"

$\Rightarrow$ <u>Απάντηση</u>: $\#(\Omega \setminus (A_1 \cup A_2)) =$

$= \#\Omega - \#A_1 - \#A_2 + \#(A_1 \cap A_2)$

$= 1024 - 2 \cdot 243 + 32$

β) Πόσες από αυτές δεν περιέχουν 3 διαδοχικά όμοια γράμματα;

$A_1 = \{XXXYZ\}$

$A_2 = \{XYYYZ\}$

$A_3 = \{XYZZZ\}$

⇝ θέλω να μετρήσω: $\#(\Omega \setminus A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

• $\#A_1 = 4 \cdot 4 \cdot 4$

• $\#A_2 = 4 \cdot 4 \cdot 4$

• $\#A_3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$

4 επιλογές για το x

4 επιλογές για το y

→ 4...z

• $\#A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{XXXXX\} = 4$

↓

όλα τα γράμματα ίδια

$\bullet \# A_1 \cap A_2 = \{xxxxy\} = 4 \cdot 4$ → επιλογές για το x, → επιλογές για το y.

$\bullet \# A_1 \cap A_3 = 4 = \{xxxxx\}$

$\bullet \# A_2 \cap A_3 = 4 \cdot 4$

Άρα: $\#(\Omega \setminus A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$\#\Omega - \#A_1 - \#A_2 - \#A_3 + \#A_1 \cap A_2 + \#A_1 \cap A_3 + \#A_2 \cap A_3 - \#A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$= 1024 - 3 \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 4 - 4$