Διάλεξη 9

29/10/24

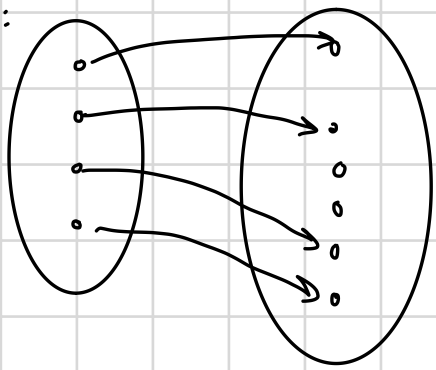
X, Y πεπερασμένα

$f: X \to Y$

α) Αν η f είναι 1-1 τότε $\#X \leq \#Y$

β) Αν η f είναι επί τότε $\#X \geq \#Y$

α) 1-1:



$f(X) \subset Y$

$\downarrow$

1-1 επί

X

$\#X = \#f(X) \leq \#Y$

β) $X \xrightarrow[\text{επί}]{f} Y \Rightarrow X \subset \bigcup_{y \in Y} \{f^{-1}(y)\}$

$$\#X = \#\bigcup_{y \in Y} \{f^{-1}(y)\} \overset{f^{-1}(y) \neq \emptyset}{\underset{\text{επί}}{\geq}} \#Y$$

$f^{-1}(y) \geq 1$

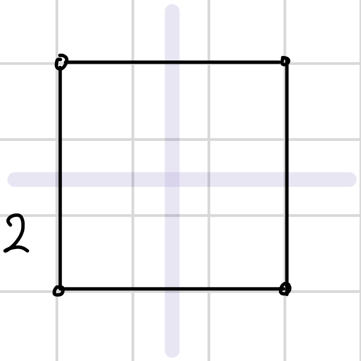
ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΩΝΑ

$\left.\begin{array}{l} f: X \to Y \\ \#X \to \#Y \end{array}\right\}$ τότε υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in X$ με $f(x_1) = f(x_2)$

↳ Ουσιαστικά είναι η άρνηση αυτού που είπαμε πριν ότι αν f 1-1 $\Rightarrow \#X \leq \#Y$.

Δηλαδή αν έχω $\#Y$ κουτιά και $x_1, \dots, x_n$ αντικείμενα, να ($n \geq \#Y$) βάλουμε στα κουτιά, αν $n > \#Y$ τότε σε κάποια κουτιά θα έχουμε πάνω από 1 αντικείμενα!

Πρόβλημα: Έχουμε ένα τετράγωνο μήκους 2. Πόσα το πολύ σημεία στα σύνορα ή στο εσωτερικό μπορούμε να βάλουμε ώστε να απέχουν το περισσότερο $\sqrt{2}$;



4 σημεία (οι κορυφές) ή περισσότερα.
Αν έχω 5 σημεία, 2 από αυτά θα είναι κοντά λιγότερο από $\sqrt{2}$.
Χωρίζω σε 4 κουτάκια και έχω 5 σημεία. (σε ένα κουτάκι θα βάλω 2).

Πρόβλημα: Δείξτε ότι αν έχουμε $n+1$ αριθμούς $x_1,\dots,x_{n+1}\in\mathbb{Z}$ τότε υπάρχουν τουλάχιστον 2 των οποίων η διαφορά διαιρείται από m.

$x_i = \pi_i m + u_i$ Διαίρεση με πηλίκο και υπόλοιπο
$0 \leq u_i \leq m$

Το σύνολο των διαφορετικών υπολοίπων είναι m το πλήθος: $0,1,2,\dots,n-1$.

Συμπέρασμα: Υπάρχουν 2 τουλάχιστον που αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο mod m

Δηλαδή $x_{i_1} = \pi_{i_1} m + u$ $\quad x_{i_2} = \pi_{i_2} m + u$

$$x_{i_1} - x_{i_2} = \underbrace{(\pi_{i_1} - \pi_{i_2})}_{\in\mathbb{Z}} \cdot m$$

Παράδειγμα:

·Έχουμε μια συνάρτηση η ατόμων $(m\geq 2)$
θα δείξουμε ότι υπάρχουν δυο άτομα με το ίδιο πλήθος γνωστών.

$f(x)$: το πλήθος των γνωστών του x → Αν με ξέρει κάποιος, τον ξέρω και γω.

Είναι σαφές ότι το $f(x)$: $0\leq f(x)\leq m-1$.
Δεν υπάρχουν ταυτόχρονα a,b άτομα με $\begin{cases} f(a)=0 \\ f(b)=m-1 \end{cases}$

$f: X \to Y$ ⇝ μπορεί να είναι $\{0,1,\dots,m-2\}$ ή $\{1,\dots,m-1\}$

$\#Y = m-1$
·Άρα $\underset{m}{f: X} \to \underset{m-1}{Y} \Rightarrow f(a)=f(b)$ για $a,b\in X$

·Άλλο παράδειγμα: Πόσα το πολύ υποσύνολα του $[n]$ μπορούμε να επιλέξουμε ώστε οποιαδήποτε από αυτά να έχουν ένα κοινό στοιχείο.

θα δείξουμε ότι το μέγιστο πλήθος τέτοιων συνόλων είναι 2^{n-1}.
θεωρούμε τα υποσύνολα του $[n]$ που περιέχουν το $\{1.\}$
$\{1\}\cup T$, $T\subset\{2,\dots,n\}$ → έχω 2^{n-1} τέτοια T

·Έστω ότι μας δίνονται $2^{n-1}+1$ υποσύνολα του $[n]$
θα δείξουμε υπάρχουν δυο που είναι ξένα μεταξύ τους.
Χωρίζουμε τα υποσύνολα του $[n]$ σε ζευγάρια
$\{S,\bar{S}\}$ ∼ $S\subset[n]$, $\bar{S}=[n]\setminus S$.
↳ Μη διατεταγμένα ζευγάρια $\Rightarrow \{S,\bar{S}\}=\{\bar{S},S\}$

Πόσα είναι αυτά τα ζευγάρια; $\rightsquigarrow$ 2^{n-1} το πλήθος.
Γιατί έχω να διαλέξω 2^n για το S και αυτομάτως διαλέγω και το $\overline{S}$, άρα έχω τα μισά: $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$!

Μας έδωσαν $2^{n-1}+1$ σύνολα
Έστω $A_1, \dots, A_{2^{n-1}+1}$. Αυτά τα βάζω σε ζευγάρια.

$A_i \to (A_i, \overline{A_i})$. Άρα αφού είναι λιγότερα τα ζευγάρια,

$$\left.\begin{array}{l} A_i \to (S, \overline{S}) \\ A_i' \to (S, \overline{S}) \end{array}\right\} A_i = S,\ A_i' = \overline{S}!$$

$$\#X < \infty, \quad f: X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} X$$

$$f^i = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{i-\text{φορές}}$$

Υπάρχει ένας $k \in \mathbb{N}$: $f^k = Id_X$ (ταυτοτική), ενώ η $f, f^2, \dots, f^{k-1}$ είναι ανά 2 διαφορετικές.

(α' τρόπος)
Άλγεβρα: (Θεωρία Ομάδων) "Η τάξη κάθε στοιχείου διαιρεί την τάξη της ομάδας η οποία είναι $n!$ " (μεταθέσεων)

(β' τρόπος)
Διακριτά: υπάρχουν $q = n!$ $\quad n = \#X$
1-1 και επί συναρτήσεις f.
Άρα $q+1$ $\quad f, f^2, \dots, f^{q+1}$ δυνάμεις, υπάρχουν δύο ίσες:

$$f^i = f^j \qquad 0 \le i \le j \le q+1$$

ή ισοδύναμα:

$f^{j-i} = Id_X$, άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$: $f^k = Id_X$

Ανάμεσα σε όλους αυτούς διαλέξω τον μικρότερο.
$\Rightarrow$ $f, f^2, \dots, f^{k-1}$ ανα 2 διαφορετικές.

Διαμέριση Συνόλων

$$X = B_1 \cup \dots \cup B_n \quad \text{με } B_i \cap B_j \neq \emptyset.$$

Κάθε διαμέριση ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας
"$\sim$" σχέση ισοδυναμίας
Ιδιότητες: $\left\{\begin{array}{l} \circ\ a \sim a \\ \circ\ a \sim b \Rightarrow b \sim a \\ \circ\ a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c. \end{array}\right\}$

$\hookrightarrow$ $a \sim b \Leftrightarrow a, b \in B_i$

Διαμέριση $\Rightarrow$ σχέση ισοδυναμίας
Αντίστροφα, κάθε σχέση ισοδυναμίας δίνει μια διαμέριση:

$X = \bigcup K_a$, K_a : Η κλάση ισοδυναμίας του a
$= \{x \in X,\ x \sim a\}$

Οι κλάσεις ισοδ. αποτελούν διαμέριση
π.χ) $K_a \cap K_b = \left\{\begin{array}{l} K_a, \text{ αν } a \sim b \\ \emptyset, \text{ αν } a \nsim b \end{array}\right\}$

Αν $x \in K_a \cap K_b$ $\left.\begin{array}{l} x \sim a \\ x \sim b \end{array}\right\} a \sim b. \Rightarrow$ κάθε $y \in K_a \Rightarrow y \in K_b$.

$X = K_a$? αν και το X γράφεται ως ένωση των κλάσεων ισοδ.

αν όχι, τότε $\exists y \in X \setminus K_a$
$X = K_a \cup K_y$? $\xrightarrow{\text{ΝΑΙ}}$ τέλος $X = K_a \cup K_y$
↓ όχι
$\exists z \in X \setminus (K_a \cup K_y)$
$\Rightarrow X = K_a \cup K_y \cup K_z$?
...
κάποια στιγμή η διαδικασία τελειώνει.

- Διαμέριση
- Κλάσεις ισοδυναμίας (κάποιας σχέσης ισοδυναμίας)
- $f: X \to Y$
  $f^{-1}(y)$ όταν $y \in Y$ (Δεν έχω υποθέσει ότι η f είναι αντιστρέψιμη δηλ. 1-1 και επί, οπότε f^{-1} είναι η αντίστροφη, αλλά $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$)

Και έχουμε το εξής:
⤳ $\bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$ είναι διαμέριση του X.
γιατί συμβαίνει αυτό;

$f^{-1}(y) \cap f^{-1}(y')$. Μπορούν να έχουν μη κενή τομή;

Αυτό σημαίνει ότι $\exists x \in f^{-1}(y) \to f(x) = y$, $x \in f^{-1}(y') \to f(x) = y'$ $\Big\} \to y = y'$

Αν $y \neq y'$, $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(y') = \emptyset$.

Αν $x \in X$, τότε $x \in \underbrace{f^{-1}(f(x))}_{\text{σύνολο!}} \Rightarrow$ οι $\bigcup_y f^{-1}(y) = X$.

$f^{-1}(f(x)) \supset \{x\}$

$f(x)$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f^{-1}(4) = \{2, -2\}$ → Συνεχής περίπτωση.

$x \to x^2$ $f^{-1}(f(2)) = \{2, -2\}$.

Γενίκευση της Αρχής του Περιστεριώνα:

$$f: X \to Y, \quad \# Y = m, \quad \# X \geq n \cdot m + 1.$$

Τότε, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_{n+1}$ στοιχεία του X με $f(x_1) = \ldots = f(x_{n+1})$ $\in f^{-1}(f(x_1))$

Για $n=1$ έχω την κλασική αρχή του Περιστεριώνα.

Απόδειξη:

Γράφω το X ως ξένη ένωση: $X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$. (**)

Θέλω να δείξω ότι υπάρχει ένα $y \in Y$ με $\# f^{-1}(y) \geq n+1$. (*)

Αν δεν ισχύει η (*) τότε $\forall y \in Y$:

$$\# f^{-1}(y) < n+1 \Rightarrow \# f^{-1}(y) \leq n$$

(**)

$$\# X = \sum_{y \in Y} \# f^{-1}(y) \leq m \cdot n \quad \text{άτοπο!}$$

Υπάρχουν 2 τετριμμένες διαμερίσεις του X:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = X \\ X = \bigcup_{x \in X} \{x\}. \end{array} \right\}.$$

Απαρίθμηση Διαμερίσεων

$S(n,k) = \{$το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$ με k το πλήθος διαμερίσεις$\}$.

$S(3,1) = 1$, διότι $[3] = \{1,2,3\}$ είναι μια τέτοια διαμέριση.

$S(3,2) = 3$, διότι
$$\begin{aligned} [3] &= \{1,2\} \cup \{3\} \\ &= \{1,3\} \cup \{2\} \\ &= \{2,3\} \cup \{1\} \end{aligned}$$

$S(3,3) = 1$, διότι $[3] = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$.

$$S(n,k) = k \cdot S(n-1,k) + S(n-1,k-1)$$

- Από τις $S(n,k)$ διαμερίσεις οι $S(n-1,k-1)$ περιέχουν το $\{n\}$ ως μέρος τους.

Οι υπόλοιπες $k \cdot S(n-1,k)$ διαμερίσεις του $[n-1]$ με k μέρη όπου προσθέτουμε το n σε κάθε μια από αυτές.

$$[n-1] = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$$

$$\left.\begin{array}{l} \hookrightarrow (B_1 \cup \{n\}) \cup B_2 \cup \dots \cup B_k. \\ \hookrightarrow B_1 \cup (B_2 \cup \{n\}) \cup \dots \cup B_k \\ \hookrightarrow \vdots \\ \hookrightarrow B_1 \cup \dots \cup B_{n-1} \cup (B_k \cup \{n\}) \end{array}\right\} k \text{ διαφορετικοί τρόποι.}$$