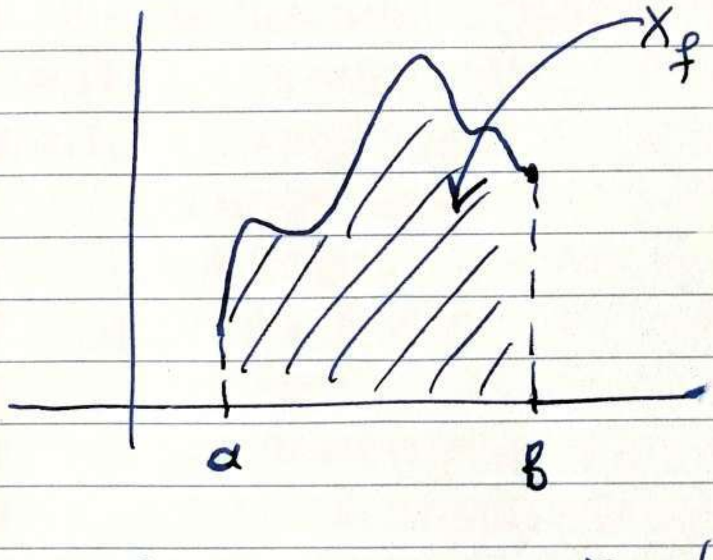
Το αρχικό κίνητρο για την ανάπτυξη της θεωρίας μέτρου ήταν η αντιμετώπιση κάποιων μειονεκτημάτων του ολοκληρώματος Riemann. Ας θυμηθούμε:

Ολοκλήρωμα Riemann: Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη, $f \geq 0$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του



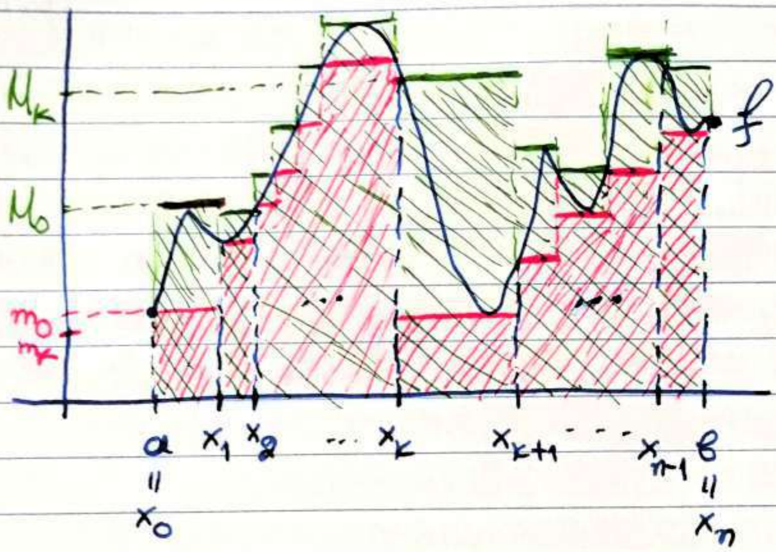
$$X_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P} = \{\underset{\overset{\shortparallel}{a}}{x_0} < x_1 < x_2 < \dots < \underset{\overset{\shortparallel}{b}}{x_n}\}$,

ορίζουμε $\|\mathcal{P}\| := \max\{x_{k+1} - x_k : k = 0, 1, \dots, n-1\}$ (το πλάτος της διαμέρισης), καθώς και

$m_k := \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$,

$M_k := \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$, $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$.



Ορίζουμε <u>το κάτω άθροισμα</u> της f ως προς την $\mathcal{P}$

ως: $L(f,\mathcal{P}) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k \,(x_{k+1} - x_k)$,

και <u>το άνω άθροισμα</u> της f ως προς την $\mathcal{P}$

ως: $U(f,\mathcal{P}) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k \,(x_{k+1} - x_k)$

Αν $\sup\{L(f,\mathcal{P}) :$ διαμερίσεις $\mathcal{P}$ του $[a,b]\}$

$= \inf\{U(f,\mathcal{P}) :$ ——— " ——— $\}$,

$(= I$, για κάποιο $I \in \mathbb{R})$,

τότε λέμε ότι η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη,

και ορίζουμε $\int_a^b f(x)\,dx := I =: \text{Εμβ}(X_f)$.

Riemann
ολοκλήρωμα,
σύμβολο για το $\text{Εμβ}(X_f)$

Η ουσία εδώ είναι ότι προσεγγίζουμε το γράφημα της f, άνω και κάτω, όσο καλύτερα μπορούμε, με γραφήματα συναρτήσεων που είναι σταθερές κατά διαστήματα (σ.κ.δ).

Για κάθε σ.κ.δ. συνάρτηση είναι πολύ απλό το πώς πρέπει να οριστεί το ολοκλήρωμά της (εμβαδό κάτω από το γράφημα = άθροισμα εμβαδών παραλληλογράμμων). Αν αυτή η προσέγγιση της f είναι καλή, συγκεκριμένα αν

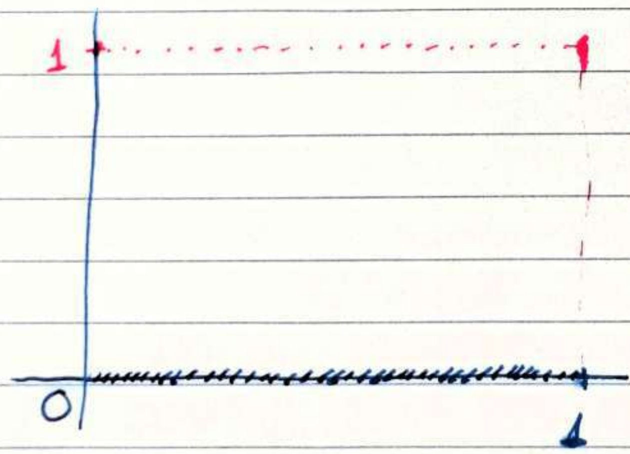
$$\sup\left\{\int_a^b l \ : \ l \le f,\ l \text{ σ.κ.δ.}\right\}$$
$$= \inf\left\{\int_a^b u \ : \ u \ge f,\ u \text{ σ.κ.δ.}\right\},$$

τότε ακριβώς ισχύει ότι η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη (και $\int_a^b f(x)dx$ ισούται με τις παραπάνω ίσες ποσότητες). [Αυτό είναι κάτι που δε θα αποδείξουμε.]

Άρα, ολοκλήρωμα Riemann ορίζεται μόνο για συναρτήσεις f που είναι τόσο απλές ώστε να προσεγγίζονται καλά, κάτω και άνω, από συναρτήσεις σταθερές κατά διαστήματα.

Για οποιαδήποτε πιο "πολύπλοκη" f, ολοκλήρωμα Riemann δεν ορίζεται. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η συνάρτηση Dirichlet :

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$



$L(f,P) = 0$
$U(f,P) = 1$, $\forall$ διαμέριση P του $[0,1]$. Στην ουσία, το πρόβλημα είναι ότι η "καλύτερη" σ.κ.δ. συνάρτηση που προσεγγίζει την f από κάτω είναι η συνάρτηση 0, ενώ η "καλύτερη" σ.κ.δ. συνάρτηση που προσεγγίζει την f από πάνω είναι

η συνάρτηση 1. Και αφού $\int_0^1 0 = 0 \neq 1 = \int_0^1 1$,
δεν υπάρχει το ολοκλήρωμα Riemann της f.
Με άλλα λόγια, οι σ.κ.δ. συναρτήσεις δεν έχουν την πολυπλοκότητα που απαιτείται για να προσεγγίσουν την f, και έτσι η θεωρία του Riemann δεν μπορεί να εφαρμοστεί για να υπολογιστεί το $\text{Εμβ}(X_f)$.

Οπότε έχουμε τις εξής

<u>Αδυναμίες του ολοκληρώματος Riemann:</u>

1. Για να είναι μία f Riemann-ολοκληρώσιμη, πρέπει να είναι (i) φραγμένη, και (ii) ορισμένη σε φραγμένο διάστημα.

2. Υπάρχουν συναρτήσεις f για τις οποίες "νιώθουμε" ποιό πρέπει να είναι το $\text{Εμβ}(X_f)$, οι οποίες όμως δεν είναι Riemann-ολοκληρώσιμες.

Παράδειγμα είναι η συνάρτηση Dirichlet

$$\left(f:[0,1]\to\mathbb{R}, \quad f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases} \right).$$

Η f είναι 0 παντού στο (υπεραριθμήσιμο) $[0,1]$, με την εξαίρεση αριθμήσιμων μόνο σημείων. Δηλαδή, η f είναι πρακτικά η συνάρτηση 0, και άρα θα έπρεπε να μπορούμε να πούμε ότι $\int_0^1 f \ (:= \text{Εμβ}(X_f))=0$. Αυτό θα ισχύει για το ολοκλήρωμα Lebesgue που θα δούμε αργότερα (και μάλιστα, στη θεωρία του Lebesgue, η συνάρτηση f ταυτίζεται με τη 0).

(3) Το ολοκλήρωμα Riemann δε σέβεται όρια ακολουθιών συναρτήσεων: Έστω ότι $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Riemann-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, με $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$,

και έστω ότι $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ $\forall x \in [a,b]$,

για μια f αρκετά "όμορφη" - συγκεκριμένα φραγμένη. Τότε:

(i) Ισχύει ότι η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη;

<u>ΟΧΙ</u>! Π.χ. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = q_1, q_2, \dots, q_n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

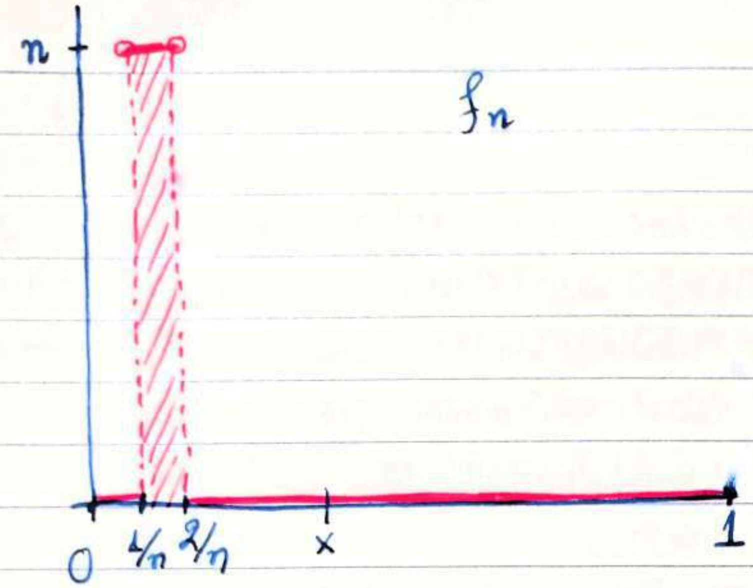
$(\forall n \in \mathbb{N})$, όπου $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$.

Τότε, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ $\forall x \in [0,1]$,

όπου f είναι η συνάρτηση Dirichlet (και άρα μη ολοκληρώσιμη κατά Riemann).

(ii) Ακόμα και αν η f <u>είναι</u> Riemann-ολοκληρώσιμη, ισχύει ότι $\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$;

<u>ΟΧΙ</u>! Π.χ., $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, θεωρούμε την συνάρτηση $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την εξής γραφική παράσταση:



(0 παντού, εκτός πάνω από το $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, όπου η τιμή είναι 1).

Κάθε f_n είναι Riemann-ολοκληρώσιμη, με

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \text{εμβαδό παραλληλογράμμου με βάση } (1/n, 2/n) \text{ και ύψος } n$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ωστόσο, η $(f_n)_n$ συγκλίνει κατά σημείο στη 0:

(Για $x > 0$ στο $[0,1]$, για μεγάλα n έχουμε $\frac{2}{n} < x$, άρα το "bound" της f_n)

(βρίσκεται αριστερά από το x, άρα $f_n(x)=0$.

$$\Rightarrow \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall\, x\in(0,1].$$

Για $x=0$: $\quad f_n(0)=0 \quad \forall n \rightarrow f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

Δηλαδή, $\quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall x\in[0,1]$,

αλλά δεν ισχύει ότι $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 0\,dx$ $(=0)$.

Η θεωρία του Lebesgue είναι το κατάλληλο πλαίσιο για να μελετήσουμε όρια ολοκληρωμάτων.

→ <u>Η ιδέα του Lebesgue</u> (στο περίπου!) :

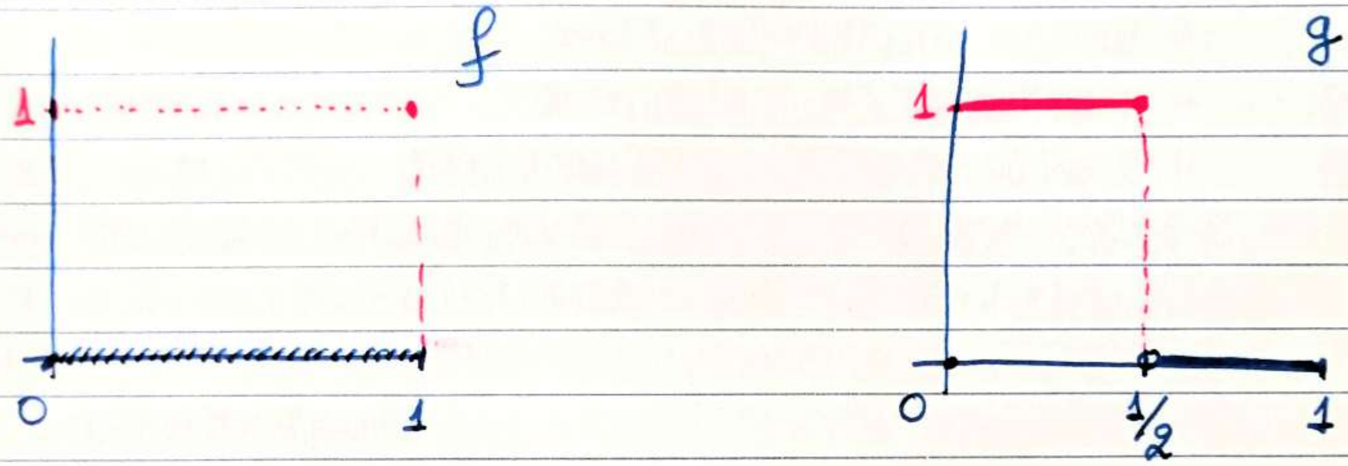
Ας συγκρίνουμε τη (μη Riemann ολοκληρώσιμη) συνάρτηση Dirichlet ($f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}),$$

με την Riemann-ολοκληρώσιμη $g:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1/2]\\ 0, & x\in(1/2,1]\end{cases},$$

που είναι σταθερή κατά διαστήματα και έχει το ίδιο σύνολο τιμών με την f.



Συμβολίζοντας το μήκος με λ, έχουμε ότι

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 1 \cdot \lambda\left([0, 1/2]\right) + 0 \cdot \lambda\left([1/2, 1]\right).$$

Riemann, $= E\mu\beta(X_g)$

Άρα, θα ήταν λογικό να πούμε επίσης ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx := 1 \cdot \lambda\left(\mathbb{Q} \cap [0,1]\right) + 0 \cdot \lambda\left([0,1] \setminus \mathbb{Q}\right),$$

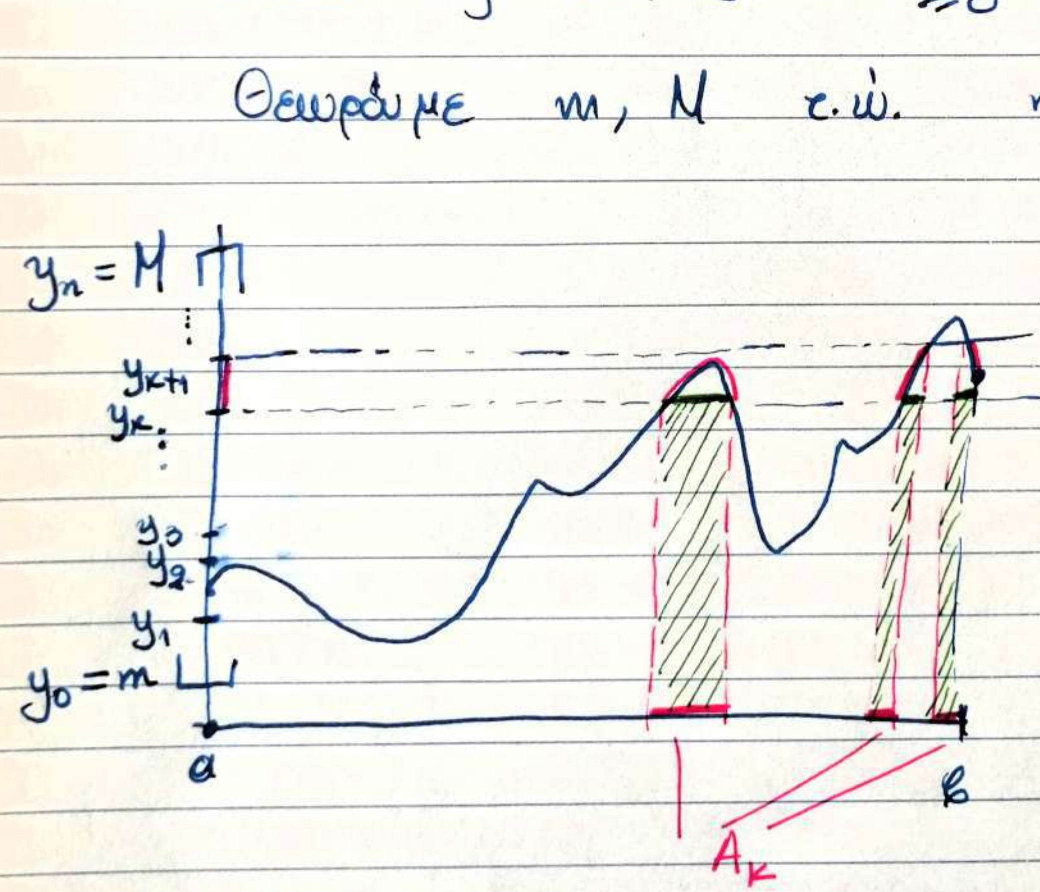
όχι Riemann!
(αλλά $= E\mu\beta(X_f)$)

ό,τι και αν μπορούν να σημαίνουν αυτά τα μήκη.

Δηλαδή, αντί να προσπαθούμε να προσεγγίσουμε κατά την f με σταθερές κατά διαστήματα συναρτήσεις (που δε γίνεται), μπορούμε να δούμε την f ως "σταθερή κατά (πιο περίπλοκα) κομμάτια", και να ορίσουμε το ολοκλήρωμά της με βάση το σύνολο τιμών της (αντί με βάση το πεδίο ορισμού της). Η ιδέα του Lebesgue λοιπόν ήταν η εξής:

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ φραγμένη.

Θεωρούμε m, M τ.ώ. $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b]$,



και θεωρούμε μία διαμέριση $Q = \{\underset{m}{\underset{\shortparallel}{y_0}} < y_1 < \dots < \underset{M}{\underset{\shortparallel}{y_n}}\}$ του $[m, M]$.

Θεωρούμε Q με <u>πολύ</u> μικρό πλάτος $\|Q\|$.

Τότε, $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$, το y_k είναι περίπου ίσο με το y_{k+1}, και άρα τα σημεία του

$$A_k = f^{-1}\left([y_k, y_{k+1})\right)$$
$$= \left\{x \in [a,b] : f(x) \in [y_k, y_{k+1})\right\}$$

είναι "ακριβώς" τα $x \in [a,b]$ για τα οποία

$$f(x) \text{ "="} \ y_k.$$

Έτσι, όταν $\|Q\| \to 0$, πρέπει να ισχύει ότι

$$E\mu\beta(X_f) \text{ "="} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \lambda(A_k).$$

$$\int_a^b f \quad \leftarrow \text{ολοκλήρωμα Lebesgue}.$$

⚠ Βλέπουμε ότι, $\forall k = 0, 1, \ldots, n-1$, το κομμάτι της γραφικής παράστασης της f που ζει στο (πολύ στενό) οριζόντιο πλαίσιο μεταξύ y_k και y_{k+1} αντικαθίσταται από τη σταθερή συνάρτηση y_k. Αυτό βέβαια γίνεται πάνω από το πιθανόν πολύ περίπλοκο σύνολο A_k. Άρα, για να βρούμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f, μας επιτρέπεται να προσεγγίσουμε την f από συναρτήσεις σταθερές πάνω από "περίπλοκα" σύνολα, και όχι μόνο από συναρτήσεις σταθερές πάνω από διαστήματα (όπως επιβάλλει ο Riemann).

Με αυτό τον τρόπο, προσεγγίζουμε την f με περισσότερη ακρίβεια, και καταφέρνουμε να υπολογίσουμε το $E\mu\beta(X_f)$. Αυτό θα βγάζει πιο πολύ νόημα στο τέλος του μαθήματος: πράγματι θα έχουμε ότι

$$\int_a^b f = \sup\left\{\int_a^b s : s \leq f,\ s \text{ σταθερή κατά "περίπλοκα" κομμάτια}\right\}.$$

Lebesgue

→ Με βάση τα παραπάνω, ιδανικά θα θέλαμε να ορίσουμε μήκος για κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

<u>Πρόβλημα:</u> Ψάχνουμε $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$,

το δυναμοσύνολο του $\mathbb{R}$

τέτοια ώστε : $\forall A \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda(A)$ είναι το μήκος του A.

Επιβάλλουμε τις εξής ιδιότητες:

(1) $\lambda([0,1)) = 1$.

(2) $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x+A) = \lambda(A)$

$$\left(x+A := \{x+a : a \in A\} \right)$$

(3) Αν $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι ακολουθία ξένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)$.

<u>Άσκηση:</u> Κάθε τέτοια λ ικανοποιεί και τα εξής:

(4) $\lambda(\emptyset) = 0$

(5) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ είναι ξένα, τότε

$$\lambda(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) + \ldots + \lambda(A_n).$$

(6) Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

! <u>Θεώρημα:</u> Δεν υπάρχει τέτοια $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω ότι υπάρχει. Θα κατασκευάσουμε ένα σύνολο N του οποίου το μήκος $\lambda(N)$ δεν μπορεί να υπάρχει, καταλήγοντας σε άτοπο.

<u>Βήμα 1:</u> Ορίζουμε μια σχέση $\sim$ ισοδυναμίας στο $[0,1)$, ως εξής:

Το N λέγεται σύνολο του Vitali (ο Vitali το κατασκεύασε)

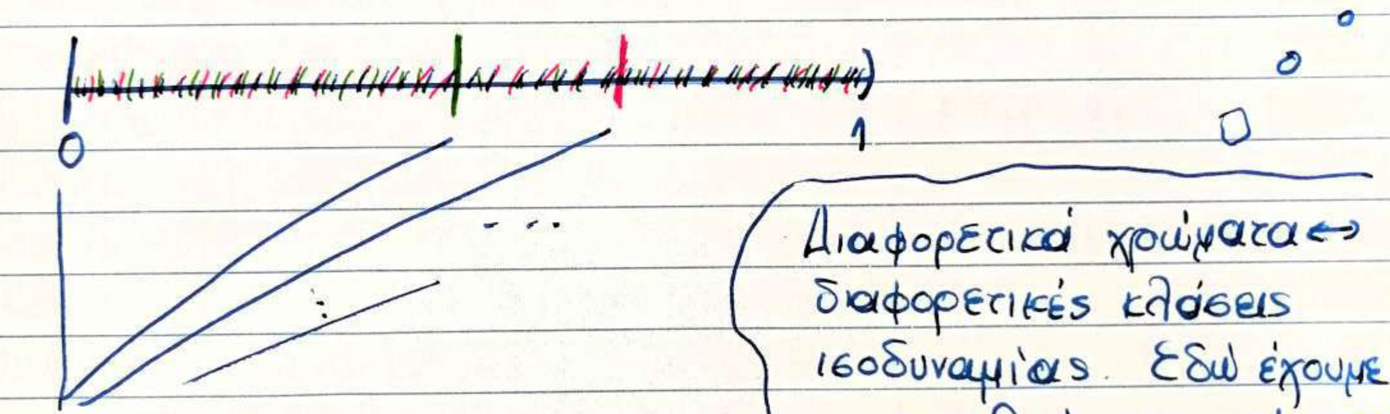
$$x \sim y \underset{\text{ορ}}{\iff} x - y \in \mathbb{Q}.$$

<u>Βήμα 2:</u> Η $\sim$ επάγει μία διαμέριση του $[0,1)$ σε κλάσεις ισοδυναμίας.

(Η κλάση ισοδυναμίας του x είναι το σύνολο $E_x := \{ y \in [0,1)$ που διαφέρουν από το x κατά ρητό$\}$

$$= \{ x + q : q \in \mathbb{Q} \} \cap [0,1)$$
$$= (x + \mathbb{Q}) \cap [0,1).$$)

Η κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι αριθμήσιμο σύνολο, αλλά η ένωση των (ξένων) κλάσεων ισοδυναμίας είναι το $[0,1)$, που είναι υπεραριθμήσιμο. Οπότε, έχουμε υπεραριθμήσιμες το πλήθος ξένες κλάσεις E_x, με ένωση το $[0,1)$.



Διαφορετικά χρώματα ⟷ διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Εδώ έχουμε υπεραριθμήσιμα χρώματα.

N : σύνολο αντιπροσώπων, υπεραριθμήσιμο.

<u>Βήμα 3:</u> Δημιουργούμε ένα σύνολο N από αντιπροσώπους, που περιέχει έναν ακριβώς αντιπρόσωπο από αυτές τις (υπεραριθμήσιμες το πλήθος) ξένες κλάσεις. [Για αυτό χρειαζόμαστε το αξίωμα της επιλογής].

Βήμα 4: $\forall\, q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$, θεωρούμε το

$N_q := N + q$ (μεταφορά του N κατά q)

Ισχυρισμός:

$$[0,1) \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} N_q \subseteq [-1,2)$$

Μεταφέροντας έναν αντιπρόσωπο κατά όλους τους ρητούς, δημιουργούμε την κλάση ισοδυναμίας του. Κάνοντας αυτές τις μεταφορές για όλους τους αντιπροσώπους, δημιουργούμε το $[0,1)$.

"Σέρνουμε" το N το πολύ κατά 1 αριστερά / δεξιά

και τα N_q είναι ξένα ανά δύο

Δύο αντιπρόσωποι δεν μπορούν να διαφέρουν κατά ρητό...

Ο ισχυρισμός θα αποδειχθεί τυπικά αργότερα. Προς το παρόν συνεχίζουμε:

$$[-1,2) = [-1,0) \amalg [0,1) \amalg [1,2)$$

$$\underset{(5)}{\Longrightarrow} \lambda([-1,2)) = \lambda([-1,0)) + \lambda([0,1)) + \lambda([1,2))$$

$$\underset{(2)}{=} 3 \cdot \lambda([0,1))$$

$$\underset{(1)}{=} 3.$$

Οπότε, από το (6),

$$\underbrace{\lambda([0,1))}_{=1} \leq \lambda\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} N_q\Big) \leq \underbrace{\lambda([-1,2))}_{=3}$$

Επίσης, αφού τα N_q είναι ξένα ανά δύο,

$$\lambda\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} N_q\Big) \underset{(3)}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} \underbrace{\lambda(N_q)}_{\overset{(2)}{=} \lambda(N)}.$$

- Αν $\lambda(N)=0$, τότε $\lambda\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} N_q\Big) = 0$, άτοπο, αφού $\lambda(\ldots) \geq 1$.
- Αν $\lambda(N)>0$, τότε $\lambda\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} N_q\Big) = +\infty$, άτοπο, αφού $\lambda(\ldots) \leq 3$.

Άρα, το $\lambda(N)$ δεν ορίζεται, άτοπο

(καθώς $\lambda : \underline{\mathcal{P}(\mathbb{R})} \to [0, +\infty]$).

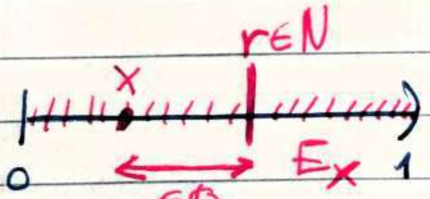
Εδώ τελειώνει η απόδειξη. Δείχνουμε και επίσημα τον ισχυρισμό:

- $\displaystyle\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} N_q \subseteq [-1, 2)$:

$$\forall q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1), \quad N_q = q + \underbrace{N}_{\subseteq [0,1)} \subseteq [q, q+1) \subseteq (-1, 2) \subseteq [-1, 2).$$

- $\displaystyle [0,1) \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} N_q$:

$$\forall x \in [0,1), \quad x \in \underbrace{E_x}_{\text{κλάση ισοδυναμίας του } x}.$$



Η E_x έχει έναν αντιπρόσωπο r μέσα στο N, και φυσικά τα x, r διαφέρουν κατά ρητό (αφού ανήκουν στην ίδια κλάση). Άρα,

$x - r = q$, για κάποιο $q \in \mathbb{Q}$.

Επίσης, $x, r \in [0,1) \Rightarrow |x-r| < 1 \Rightarrow \underbrace{x-r}_{\overset{\shortparallel}{q}} \in (-1,1)$

Οπότε, $x - r = q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$

$\Rightarrow x = r + q \in N + q = N_q$, για το παραπάνω $q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$

$\Rightarrow x \in \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} N_q$.

- Τα N_q, $q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)$, είναι ξένα ανά δύο:

Έστω ότι $\overset{(N+q_1)}{\overset{\shortparallel}{N_{q_1}}} \cap \overset{(N+q_2)}{\overset{\shortparallel}{N_{q_2}}} \neq \emptyset$, για κάποια $q_1 \neq q_2$ στο $\mathbb{Q} \cap (-1,1)$.

Άρα, $\exists \overbrace{r_1, r_2}^{\text{αντιπρόσωποι}} \in N$ ώστε $r_1 + q_1 = r_2 + q_2$
(με $r_1 \neq r_2$, καθώς $q_1 \neq q_2$)

$\Rightarrow r_1 - r_2 = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q} \xrightarrow[r_1, r_2 \in [0,1)]{} r_1 \sim r_2$

$\Rightarrow r_1 = r_2$ (το N περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση), άτοπο.

Άρα, για $q_1 \neq q_2$ στο $\mathbb{Q} \cap (-1,1)$, έχουμε ότι

$$N_{q_1} \cap N_{q_2} = \emptyset.$$

■

⚠ Αφού δεν μπορούμε να ορίσουμε μήκος για όλα τα στοιχεία του $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, θα ορίσουμε μήκος για τα στοιχεία μιας μεγάλης κλάσης $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, που θα περιέχει τα διαστήματα. Αυτή η $\mathcal{A}$ θα είναι η Lebesgue σ-άλγεβρα.