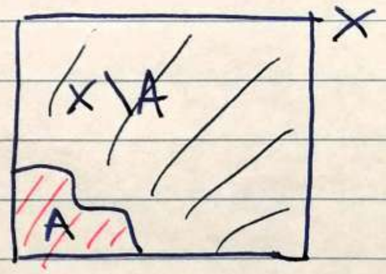
→ Άλγεβρες και σ-άλγεβρες.

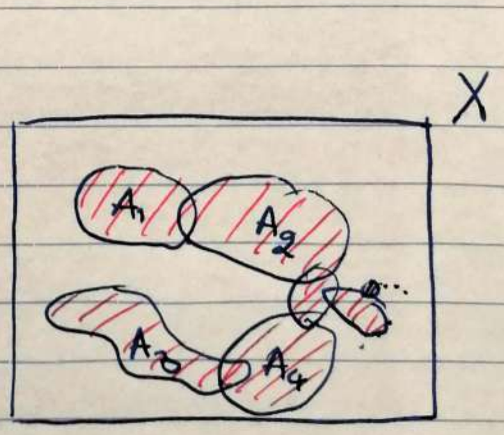
Ας πούμε ότι έχουμε ένα σύνολο X $(\neq \emptyset)$, και ότι θέλουμε να αποδώσουμε μία "φυσιολογική" έννοια μεγέθους σε κάποια υποσύνολα του X.

Θα θέλαμε να μπορούμε να πούμε ότι:

- το $\emptyset$ έχει μέγεθος 0,
- αν μπορούμε να βρούμε το μέγεθος ενός $A \subseteq X$, τότε μπορούμε να βρούμε και το μέγεθος του $X \setminus A$,



και • αν μπορούμε να βρούμε το μέγεθος συνόλων $A_1, A_2, \ldots \subseteq X$, τότε μπορούμε να βρούμε και το μέγεθος του $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.



Γι' αυτό δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς, για οικογένειες συνόλων στα οποία πιθανόν να μπορούσαμε να αποδώσουμε μία λογική έννοια μεγέθους.

→ <u>Ορισμός</u> (Άλγεβρα): Έστω $X \neq \emptyset$. Μία οικογένεια $\mathcal{A} \subseteq \underbrace{\mathcal{P}(X)}_{\text{το δυναμοσύνολο του } X}$ λέγεται <u>άλγεβρα</u> (στο X) αν ισχύουν τα εξής:

① $\emptyset \in \mathcal{A}$.

② Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$. (Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα)

③ Αν $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, τότε $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$
(Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς !<u>πεπερασμένες</u>! ενώσεις)

<u>Τότε ισχύουν και τα εξής:</u>

①' $X \in \mathcal{A}$

②' Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $B \setminus A \in \mathcal{A}$.

③' Αν $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, τότε $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$.

(Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς !<u>πεπερασμένες</u>! τομές)

⚠ Παρατηρούμε ότι ① + ② $\Longleftrightarrow$ ①' + ②,

και ② + ③ $\Longleftrightarrow$ ② + ③'.

Αυτό σημαίνει ότι στον ορισμό της άλγεβρας μπορούμε να χρησιμοποιούμε το ①' στη θέση του ①, ή/και το ③' στη θέση του ③.

<u>Απόδειξη των παραπάνω:</u> Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα στο X.

⇝ ①' : Από τα ① και ②, $\emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus \emptyset = X \in \mathcal{A}$.

⇝ ③' : Έστω $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \xRightarrow{②} X\setminus A_1, \dots, X\setminus A_n \in \mathcal{A}$

$$\xRightarrow{③} \underbrace{(X\setminus A_1) \cup \dots \cup (X\setminus A_n)}_{= X\setminus (A_1 \cap \dots \cap A_n)} \in \mathcal{A}$$

$$\xRightarrow{②} A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}.$$

⇝ ②' : Έστω $A, B \in \mathcal{A}$. Από το ②, $X\setminus A \in \mathcal{A}$

$$\xRightarrow{③'} B \cap (X\setminus A) = B\setminus A \in \mathcal{A}.$$

⇝ ①' + ② $\Longleftrightarrow$ ① + ② : Τετριμμένο.

⇝ ② + ③ $\Longleftrightarrow$ ② + ③' : Το ($\Rightarrow$) έχει δειχθεί (για να δείξουμε το (3') χρησιμοποιήσαμε μόνο το (2))

($\Leftarrow$) Έστω ότι για μία $\mathcal{A}$ ισχύουν τα (2) και (3'). Θα δείξουμε ότι ισχύει και το (3). Έστω

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \overset{(2)}{\Longrightarrow} X \setminus A_1, \dots, X \setminus A_n \in \mathcal{A}$$

$$\overset{(3')}{\Longrightarrow} \underbrace{(X\setminus A_1)\cap \dots \cap (X \setminus A_n)}_{= X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)} \in \mathcal{A}$$

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}.$$

■

→ <u>Ορισμός</u> (σ-άλγεβρα): Έστω $X \neq \emptyset$. Μία οικογένεια $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται <u>σ-άλγεβρα</u> (στο X) αν ισχύουν τα εξής:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(2) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(3) Αν $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$. (Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς !<u>αριθμήσιμες</u>! ενώσεις)

Τότε ισχύουν και τα:

(1') $X \in \mathcal{A}$.

(2') Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(3') Αν $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς !αριθμήσιμες! τομές)

⚠ Όπως και στην περίπτωση των αλγεβρών, έχουμε:

(1) + (2) $\Longleftrightarrow$ (1') + (2'), (3) + (2) $\Longleftrightarrow$ (3') + (2)

(και άρα τα (1) / (3) στον ορισμό μπορούν να αντικατασταθούν από τα (1') / (3')).

Οι αποδείξεις είναι παρόμοιες με πριν.

<u>Παρατήρηση:</u> Κάθε σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα.

Πράγματι, έστω $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο X.

Τότε, $\emptyset \in \mathcal{A}$,

και: αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Επίσης, έστω $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Τότε,

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \overbrace{A_n \cup A_n \cup A_n \cup \dots}^{A_n \text{ επ' άπειρον}}}_{\substack{\text{άπειρη αριθμήσιμη} \\ \text{ένωση στοιχείων της} \\ \text{σ-άλγεβρας } \mathcal{A}}} \in \mathcal{A}.$$

■

→ <u>Παραδείγματα:</u>

- Έστω $X \neq \emptyset$. Η $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ είναι σ-άλγεβρα (στο X), και περιέχεται σε κάθε άλλη σ-άλγεβρα (στο X).

- Έστω $X \neq \emptyset$. Η $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ είναι σ-άλγεβρα (στο X), και περιέχει κάθε σ-άλγεβρα (στο X).

• Η $\mathcal{A} = \{ A \subseteq \mathbb{N} :$ ή A πεπερασμένο
ή $\mathbb{N} \setminus A$ πεπερασμένο $\}$

είναι άλγεβρα στο $\mathbb{N}$, αλλά όχι σ-άλγεβρα:

→ (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, καθώς $\emptyset$ πεπερασμένο.

(2) Έστω $A \in \mathcal{A}$, δηλαδή A πεπερασμένο ή $\mathbb{N} \setminus A$ πεπερασμένο.

- Αν A πεπερασμένο, τότε $\underbrace{\mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \setminus A)}_{= A}$ πεπερασμένο, άρα $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{A}$.

- Αν $\mathbb{N} \setminus A$ πεπερασμένο, τότε $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{A}$.

(3) Έστω $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Θ.Δ.Ο. $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$:

- Αν όλα τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα, τότε και $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ είναι πεπερασμένο, άρα $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

- Αν κάποιο A_i δεν είναι πεπερασμένο, τότε αφού $A_i \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι το $\mathbb{N} \setminus A_i$ είναι πεπερασμένο. Αφού $\mathbb{N} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \subseteq \mathbb{N} \setminus A_i$, έχουμε και ότι το $\mathbb{N} \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ είναι

πεπερασμένο. Άρα, $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

Από τα ①, ②, ③ προκύπτει ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα.

→ Η $\mathcal{A}$ δεν είναι σ-άλγεβρα, καθώς δεν είναι

κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις. Πράγματι,

$\{2n\} \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, αφού $\{2n\}$ είναι πεπερασμένο.

μονοσύνολο

Ωστόσο $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{2n\} = 2\mathbb{N} \notin \mathcal{A}$, αφού είναι

ένα άπειρο σύνολο με άπειρο συμπλήρωμα

(τους περιττούς).

⊙ Έστω X υπεραριθμήσιμο.

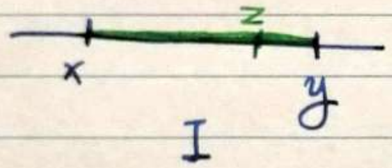
Η $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : \text{ή } A \text{ αριθμήσιμο ή } X \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$

είναι σ-άλγεβρα (Άσκηση).

Η $\mathcal{A}$ = η κλάση όλων των πεπερασμένων ενώσεων διαστημάτων (στο $\mathbb{R}$) είναι άλγεβρα, αλλά όχι σ-άλγεβρα.

⚠ Ως διάστημα ορίζουμε οποιοδήποτε συνεκτικό κατά μονοπάτια υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, ένα $I \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται <u>διάστημα</u> αν,

$\forall\, x<y \in I$,



έχουμε και ότι

$z \in I, \quad \forall\, x<z<y$.

Τα διαστήματα είναι όλα τα σύνολα της μορφής

Και τα <u>μονοσύνολα</u> είναι διαστήματα!

$[a,b], [a,b), (a,b], (a,b)$ (για $a \leq b \in \mathbb{R}$),

$[a,+\infty), (a,+\infty), (-\infty,a], (-\infty,a)$ (για $a \in \mathbb{R}$),

$\mathbb{R}$,

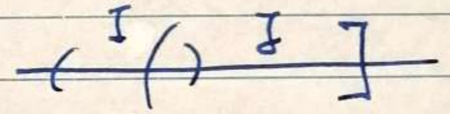
$\emptyset$.

→ Πράγματι, η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, αφού το $\emptyset$ είναι διάστημα.

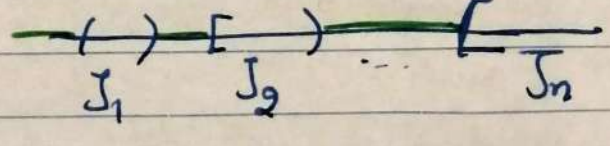
(2) Έστω $A \in \mathcal{A}$, δηλ. το A είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων. Γράφουμε $A = I_1 \cup \dots \cup I_n$, όπου τα I_i είναι διαστήματα.

Παρατηρούμε ότι, αν δύο διαστήματα I, J έχουν μη κενή τομή, τότε η $I \cup J$ είναι επίσης διάστημα.



Οπότε, μπορούμε να γράψουμε το A σαν πεπερασμένη ένωση <u>ξένων</u> διαστημάτων (επαγωγικά, αντικαθιστώντας κάθε δύο διαστήματα που τέμνονται με την ένωσή τους).

Δηλαδή, $A = J_1 \cup \dots \cup J_s$, όπου τα J_i είναι ξένα διαστήματα.



Οπότε, $\mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R} \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_s)$ είναι επίσης πεπερασμένη ένωση διαστημάτων. (πράσινα στο σχήμα).

Άρα, $\mathbb{R}\setminus A \in \mathcal{A}$.

(3) Έστω $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$.

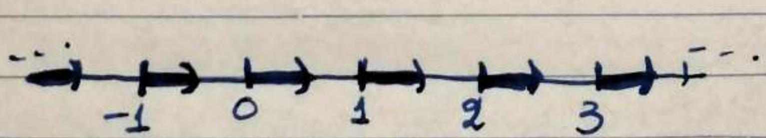
Αφού κάθε A_i είναι πεπερασμένη ένωση από διαστήματα, τότε και η πεπερασμένη ένωση $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ είναι πεπερασμένη ένωση από διαστήματα. Άρα, $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$. ■

⚠ Στις σημειώσεις υπάρχει μία διαφορετική απόδειξη ότι το $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα.

→ Το $\mathcal{A}$ δεν είναι σ-άλγεβρα:

Το $\mathcal{A}$ δεν είναι κλειστό ως προς αριθμήσιμες ενώσεις, αφού κάθε $[n, n+1/2)$ (για $n \in \mathbb{Z}$) ανήκει στο $\mathcal{A}$ (ως διάστημα), αλλά

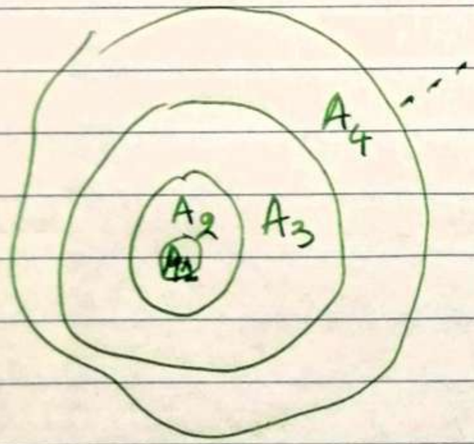
$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1/2) \notin \mathcal{A}$, επειδή δεν μπορεί να γραφτεί ως πεπερασμένη ένωση διαστημάτων.



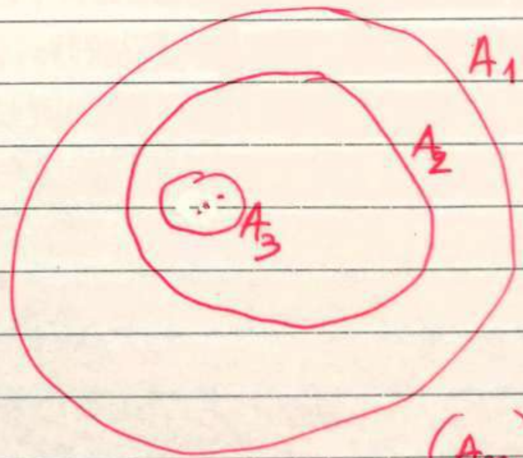
⊙ Η $\mathcal{A}$ = κλάση των αριθμήσιμων ενώσεων διαστημάτων δεν είναι σ-άλγεβρα (Άσκηση. Μπορείτε να βρείτε αντιπαράδειγμα;).

→ Αύξουσες και φθίνουσες ακολουθίες συνόλων.

Ορισμός: Μία ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ υποσυνόλων του X λέγεται αύξουσα (φθίνουσα) αν $A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ $(A_n \supseteq A_{n+1})$



$(A_n)_n \nearrow$



$(A_n)_n \downarrow$

Πρόταση: Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα στο X.

Τότε, η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα $\Leftrightarrow$ ισχύει οποιοδήποτε από τα παρακάτω:

(α) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα,

τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(β) Αν $B_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα,

τότε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{A}$.

(γ) Αν $C_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και τα C_n είναι ξένα ανά δύο,

τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in \mathcal{A}$.

<u>Απόδειξη</u>: $(\Longrightarrow)$ Αν η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα, τότε είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές και ενώσεις, άρα ισχύουν τα (α), (β), (γ).

$(\Longleftarrow)$ • Το (α) συνεπάγεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα:

Η $\mathcal{A}$ είναι <u>άλγεβρα</u> (από υπόθεση), άρα

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, και (2) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

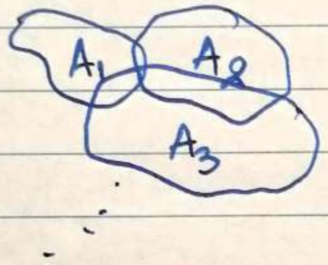
Πρέπει να δείξουμε τώρα και το:

(3) Αν $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$,

τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$:

Έστω $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Θα γράψουμε την ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ως ένωση συνόλων <u>αύξουσας</u> ακολουθίας στην $\mathcal{A}$: Ορίζουμε

$$B_1 := A_1 \in \mathcal{A}.$$



$B_2 := A_1 \cup A_2 \; \underline{\in \mathcal{A}}$ ($\mathcal{A}$ <u>άλγεβρα</u>, $A_1, A_2 \underline{\in \mathcal{A}}$).

$B_3 := A_1 \cup A_2 \cup A_3 \in \mathcal{A}$,

$\vdots$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Κάθε $B_n \in \mathcal{A}$, ως πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{A}$ (η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα).

Επίσης,

$$B_1 \cup \dots \cup B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

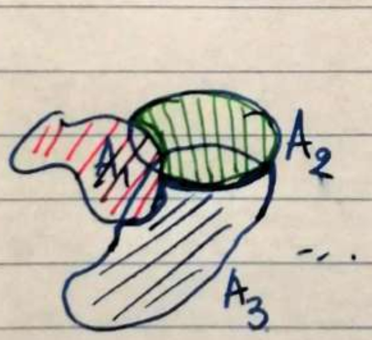
Άρα, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι <u>αύξουσα</u> ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A} \xRightarrow{(a)} \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{A}$.

Αφού $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ (απλό), έχουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

• Το (β) συνεπάγεται με παρόμοιο τρόπο ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα (χρησιμοποιώντας τομές αντί για ενώσεις, φτιάχνουμε μία φθίνουσα ακολουθία $(E_n)_{n=1}^{+\infty}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$. Εδώ, $E_n := A_1 \cap \dots \cap A_n$).

• Το (γ) συνεπάγεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα: Και πάλι, αφού η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ΘΔΟ $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Θα γράψουμε αυτή την ένωση ως ξένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{A}$: Ορίζουμε:

$$B_1 := A_1 \in \mathcal{A}$$



$$B_2 := A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A} \quad (\mathcal{A} \text{ άλγεβρα})$$

$$B_3 := A_3 \setminus \underbrace{(A_1 \cup A_2)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

$$\vdots$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n := A_n \setminus \underbrace{(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \quad (\mathcal{A} \text{ άλγεβρα})$$

Τα B_n είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$,

και άρα από το $(\ast)$: $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{A}$.

Αφού $\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n}_{\text{(εύκολο)}}$, έχουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

■

→ <u>Η παραγόμενη σ-άλγεβρα</u>:

Έστω $X \neq \emptyset$.

- Η μικρότερη σ-άλγεβρα στο X είναι το $\{\emptyset, X\}$.
- Αν κάποιος μάς επιβάλει να φτιάξουμε μία σ-άλγεβρα στο X που να περιέχει κάποιο συγκεκριμένο $A \subseteq X$, ξέρουμε ότι αναγκαστικά αυτή η σ-άλγεβρα πρέπει να περιέχει και το $X \setminus A$.

  Η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το A είναι η: $\{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$.
- Αν θέλουμε η σ-άλγεβρά μας να περιέχει δύο σύνολα $A, B \subseteq X$, πρέπει να περιέχει και πολλά

άλλα σύνολα : τα $X \setminus A$, $X \setminus B$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $X \setminus (A \cap B)$ ... (Άσκηση : Βρείτε τη μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα A, B).

Γενικά, αν κάποιος μάς δώσει μία οικογένεια $\mathcal{F} \neq \emptyset$ υποσυνόλων του X, θα θέλαμε να καταλάβουμε ό,τι μπορούμε για τη μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}$. Καταρχάς, θα δείξουμε ότι αυτή η μικρότερη σ-άλγεβρα <u>υπάρχει</u>, χρησιμοποιώντας το παρακάτω:

οποιοδήποτε!

<u>Λήμμα</u>: Έστω $(C_i)_{i \in I}$ οικογένεια σ-αλγεβρών στο X. Τότε, η $\bigcap_{i \in I} C_i$ είναι σ-άλγεβρα στο X.

<u>Απόδειξη</u>:
- $\forall i \in I$, $\emptyset \in \underbrace{C_i}_{\sigma\text{-άλγεβρα}} \Longrightarrow \emptyset \in \bigcap_{i \in I} C_i$.
- Έστω $A \in \bigcap_{i \in I} C_i$. $\forall i \in I$, $A \in \underbrace{C_i}_{\sigma\text{-άλγεβρα}} \longrightarrow X \setminus A \in C_i$.

  Άρα, $X \setminus A \in \bigcap_{i \in I} C_i$.

• Έστω $A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Κάθε $\mathcal{C}_i$ είναι σ-άλγεβρα και $A_n \in \mathcal{C}_i \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{C}_i .$$

Άρα, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{C}_i$.

■

Ορισμός: Έστω $X\neq\emptyset$ και $\overset{\neq\emptyset}{\mathcal{F}}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Ορίζουμε ως τη σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{F}$, και συμβολίζουμε με $\sigma(\mathcal{F})$, την τομή όλων των σ-αλγεβρών (στο X) που περιέχουν την $\mathcal{F}$.

Από το Λήμμα, η $\sigma(\mathcal{F})$ είναι σ-άλγεβρα. Φυσικά περιέχει την $\mathcal{F}$, και είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}$, με την έννοια ότι περιέχεται σε κάθε άλλη. Δηλαδή:

Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα $\mathcal{A}\supseteq\mathcal{F}$, τότε $\mathcal{A}\supseteq\sigma(\mathcal{F})$

⚠ Αυτό μπορούμε να το δούμε ως αναβάθμιση μιας πληροφορίας, που την παίρνουμε δωρεάν:
Αν ξέρουμε ότι μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ περιέχει τα σύνολα (στοιχεία) μιας οικογένειας $\mathcal{F}$, τότε αυτόματα περιέχει τα πολύ περισσότερα στοιχεία της $\sigma(\mathcal{F})$.

! Αυτό μας δίνει μια πιθανή μεθοδολογία για να δείχνουμε ότι: $\underbrace{\sigma(\mathcal{F})}_{\text{μια παραγόμενη σ-άλγεβρα}} \subseteq \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{μια άλλη σ-άλγεβρα}}$, για κάποια $\mathcal{F}, \mathcal{A}$: $\boxed{\text{ΑΡΚΕΙ}}$ ΝΑ ΔΕΙΞΟΥΜΕ ΟΤΙ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ (γιατί τότε αυτόματα $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$).

μόνο.