→ Σημαντικό παράδειγμα: Η Borel σ-άλγεβρα:

Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Έστω

$\mathcal{T}:=$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του X

Η $\sigma(\mathcal{T})$ είναι η Borel σ-άλγεβρα του (X,d).

Τη συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(X)$.

Υπενθύμιση: Τα ανοικτά σύνολα στον (X,d) είναι οι ενώσεις ανοιχτών μπαλών $B_d(x,r)$ του (X,d).

⚠ Στη $\mathcal{B}(X)$ περιέχονται τα ανοιχτά υποσύνολα του X, τα κλειστά (αφού είναι συμπληρώματα ανοιχτών), τα G_δ (αριθμήσιμες τομές ανοιχτών), τα F_σ (αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών), αριθμήσιμες ενώσεις από G_δ, κλπ.

→ Άσκηση: Κατασκευάστε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική) που δεν είναι ούτε G_δ ούτε F_σ.

Είναι σαφές ότι, ακόμα και στο $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική), η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι ιδιαίτερα περίπλοκη. Ξέρουμε ότι παράγεται από τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, που και αυτά είναι αρκετά περίπλοκα από μόνα τους.

Τώρα θα δούμε ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ παράγεται και από πολύ απλούστερα σύνολα: διαστήματα οποιουδήποτε τύπου θέλουμε:

<u>Πρόταση:</u> Θεωρούμε τις παρακάτω οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{R}$: Γενικεύεται και στον $\mathbb{R}^k$

- $\mathcal{T}:=$ τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{F}:=$ τα κλειστά —— // ——.
- $\Delta_{(-\infty,\cdot]} := \{ (-\infty, b] : b \in \mathbb{R} \}$.
- $\Delta_{(\cdot,\cdot]} := \{ (a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a<b \}$.
- $\Delta_{(\cdot,\cdot)} := \{ (a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a<b \}$.
- $\Delta_{[\cdot,\cdot)} := \{ [a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a<b \}$.
- $\Delta_{[\cdot,+\infty)} := \{ [a,+\infty) : a \in \mathbb{R} \}$
- $\Delta_{(\cdot,\cdot)} := \{ (a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a<b \}$
- $\Delta_{(-\infty,\cdot)} := \{ (-\infty, b) : b \in \mathbb{R} \}$
- $\Delta_{(\cdot,+\infty)} := \{ (a,+\infty) : a \in \mathbb{R} \}$.
- $\Delta_{[a,b]} := \{ [a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a<b \}$.

Όλες αυτές οι οικογένειες παράγουν την ίδια σ-άλγεβρα (τη Borel). Δηλαδή:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \underset{\text{op}}{=\!=} \sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma\left(\Delta_{(-\infty,\cdot]}\right) = \sigma\left(\Delta_{(\cdot,\cdot]}\right) = \dots$$

Απόδειξη:

⊙ $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{F})$:

$\rightsquigarrow$ $\sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$: Αρκεί ΝΔΟ $\mathcal{T} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$.
(τότε, αυτόματα $\sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$).

Έστω $U \in \mathcal{T}$ (U ανοικτό)
$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus U$ κλειστό, δηλαδή $\mathbb{R} \setminus U \in \mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$

$$\underset{\sigma(\mathcal{F})\ \sigma\text{-άλγεβρα}}{\Longrightarrow} \quad U \in \sigma(\mathcal{F}).$$

Άρα, $\mathcal{T} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, και άρα $\sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$.

$\rightsquigarrow$ $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{T})$. Αρκεί ΝΔΟ $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{T})$.

Έστω $F \in \mathcal{F}$ (F κλειστό)

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus F$ ανοικτό, δηλαδή $\mathbb{R} \setminus F \in \mathcal{T} \subseteq \sigma(\mathcal{T})$

$$\underset{\sigma(\mathcal{T})\ \sigma\text{-άλγεβρα}}{\Longrightarrow} \quad F \in \sigma(\mathcal{T}).$$

Άρα, $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{T})$, και άρα $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. ■

$\odot$ $\underline{\sigma(\mathcal{T}) = \sigma\left(\Delta_{(\cdot,\cdot]}\right)}$:

$\rightsquigarrow$ $\sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma\left(\Delta_{(\cdot,\cdot]}\right)$: Αρκεί ΝΔΟ $\mathcal{T} \subseteq \sigma\left(\Delta_{(\cdot,\cdot]}\right)$.

Έστω $\mathcal{U} \in \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}$ = ένωση διαστημάτων της μορφής (a,b) (ορισμός $\mathcal{T}$)

$\Longrightarrow$ $\mathcal{U}$ = αριθμήσιμη ένωση διαστημάτων της μορφής (a,b).

ειδική περίπτωση στον $\mathbb{R}$

ΘΔΟ κάθε $(a,b) \in \sigma\left(\Delta_{(\cdot,\cdot]}\right)$

$\left(\underset{\substack{\sigma(\Delta_{(\cdot,\cdot]}) \\ \sigma\text{-άλγεβρα}}}{\Longrightarrow} \mathcal{U} \in \sigma\left(\Delta_{(\cdot,\cdot]}\right) \right)$.

Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$, και $(b_n)_n \nearrow$ στο (a,b) με $b_n \to b$. Ισχύει ότι

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(a, b_n]}_{\in \sigma(\Delta_{(\cdot,\cdot]})} \in \underbrace{\sigma\left(\Delta_{(\cdot,\cdot]}\right)}_{\substack{\sigma\text{-άλγεβρα, άρα κλειστή} \\ \text{ως προς αριθμήσιμες} \\ \text{ενώσεις.}}}.$$

Άρα $\mathcal{U} \in \sigma\left(\Delta_{(\cdot,\cdot]}\right)$

Άρα, $\mathcal{T} \subseteq \sigma\left(\Delta_{(\cdot,\cdot]}\right) \rightarrow \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma\left(\Delta_{(\cdot,\cdot]}\right)$.

$\rightsquigarrow \sigma(\Delta_{(\cdot,\cdot]}) \subseteq \sigma(\mathcal{T})$: Αρκεί ΝΔΟ $\Delta_{(\cdot,\cdot]} \subseteq \sigma(\mathcal{T})$.

Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$.

Έστω $(b_n)_n \downarrow$ στο $\mathbb{R}$, με $b_n > b$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $b_n \to b$ (π.χ. $b_n = b + \frac{1}{n}$).

Τότε, $(a,b] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(a,b_n)}_{\in \sigma(\mathcal{T})} \in \sigma(\mathcal{T})$.

Άρα, $\Delta_{(\cdot,\cdot]} \subseteq \sigma(\mathcal{T}) \Rightarrow \sigma(\Delta_{(\cdot,\cdot]}) \subseteq \sigma(\mathcal{T})$. ■

Η υπόλοιπη απόδειξη γίνεται με παρόμοιο τρόπο.

■

→ <u>Κλάσεις Dynkin:</u>

<u>Ορισμός</u>: Έστω $X \neq \emptyset$. Μια οικογένεια $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται <u>κλάση Dynkin</u> αν:

(α) $X \in \mathcal{D}$

(β) Αν $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \subseteq B$, τότε $B \setminus A \in \mathcal{D}$.

(γ) Αν $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων της $\mathcal{D}$, τότε η $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{D}$. (κλειστή ως προς ενώσεις ! <u>αυξουσών ακολουθιών</u> !)

Τότε ισχύουν και τα εξής:

(δ) $\phi \in \mathcal{D}$.

Πράγματι, $\begin{matrix} X \in \mathcal{D} \\ X \subseteq X \end{matrix} \xrightarrow{(\beta)} \underset{\overset{\shortparallel}{\phi}}{X \setminus X} \in \mathcal{D}$.

(Όμως, στον ορισμό της κλάσης Dynkin δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το "$X \in \mathcal{D}$" με το "$\phi \in \mathcal{D}$", γιατί τότε το $\{\phi\}$ θα ήταν κλάση Dynkin).

(ε) Η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, δηλαδή:
Αν $A \in \mathcal{D}$, τότε $X \setminus A \in \mathcal{D}$.

Πράγματι, αυτό προκύπτει από το (β): $\left.\begin{matrix} A \in \mathcal{D} \\ X \in \mathcal{D} \\ A \subseteq X \end{matrix}\right\} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{D}$.

(στ) Αν $(B_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων της $\mathcal{D}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{D}$

(Η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς τομές **φθινουσών ακολουθιών**!)

Πράγματι, $X \setminus B_n \in \mathcal{D}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $(X \setminus B_n)_n \nearrow$

$$\overset{(\gamma)}{\Longrightarrow} \underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X \setminus B_n)}_{\substack{\shortparallel \\ X \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n}} \in \mathcal{D} \overset{(\varepsilon)}{\Longrightarrow} \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{D}.$$

Παρατηρήσεις:

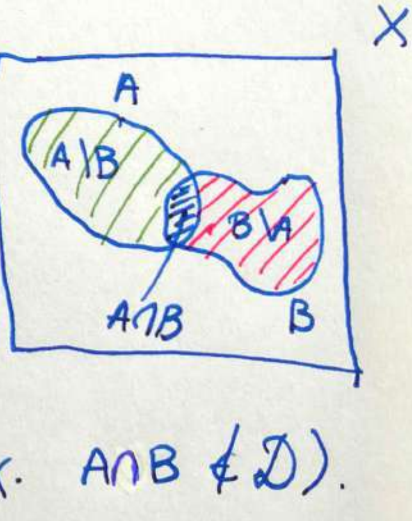
① Κάθε σ-άλγεβρα είναι κλάση Dynkin.

② Αν μια κλάση Dynkin είναι <u>και</u> άλγεβρα, τότε είναι σ-άλγεβρα

(Αποδείξαμε ότι αν μια άλγεβρα είναι κλειστή ως προς ενώσεις αυξουσών ακολουθιών, τότε είναι και σ-άλγεβρα).

③ Υπάρχουν κλάσεις Dynkin που δεν είναι άλγεβρες (και άρα ούτε σ-άλγεβρες).

<u>Π.χ.</u>: Έστω $X \neq \emptyset$ και $A, B \subseteq X$ τέτοια ώστε: $A \setminus B$, $B \setminus A$ και $A \cap B$ είναι όλα μη κενά.



Τότε, η $\mathcal{D} := \{\emptyset, X, A, B, X \setminus A, X \setminus B\}$ είναι κλάση Dynkin, αλλά δεν είναι άλγεβρα (π.χ. $A \cap B \notin \mathcal{D}$).

→ <u>Ορισμός</u> (παραγόμενη κλάση Dynkin). Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{F} \overset{\neq \emptyset}{\subseteq} \mathcal{P}(X)$ (τυχούσα οικογένεια υποσυνόλων του X). Ορίζουμε ως την <u>κλάση Dynkin που παράγεται από την $\mathcal{F}$</u>, και συμβολίζουμε με <u>$\delta(\mathcal{F})$</u>, την τομή όλων των κλάσεων Dynkin που περιέχουν την $\mathcal{F}$. (Είναι η μικρότερη κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathcal{F}$).

Ο ορισμός αυτός είναι καλός, επειδή

- υπάρχει κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathcal{F}$ (π.χ. $\mathcal{P}(X)$),

και • η τομή οσωνδήποτε κλάσεων Dynkin είναι κλάση Dynkin (άσκηση).

⚠ Αν $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ → κλάση Dynkin, τότε επίσης $\delta(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{D}$ (ισχυρότερο!).

Τώρα θα δείξουμε κάτι για παραγόμενες σ-άλγεβρες που θα μας είναι χρήσιμο αργότερα.

→ <u>Θεώρημα:</u> Έστω $X \neq \emptyset$ και $\overset{\neq \emptyset}{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ <u>κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές</u>. Τότε, $\delta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.

<u>Δηλαδή:</u> Αν $A, B \in \mathcal{F}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{F}$.

<u>Απόδειξη:</u> Θέλουμε Ν.Δ.Ο.

$$\delta(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$$

και $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \delta(\mathcal{F})$.

⇝ <u>$\delta(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$</u>: Η $\sigma(\mathcal{F})$ είναι σ-άλγεβρα, και άρα κλάση Dynkin, που μάλιστα περιέχει την $\mathcal{F}$. Αφού λοιπόν

$$\mathcal{F} \subseteq \underbrace{\sigma(\mathcal{F})}_{\substack{\text{κλάση} \\ \text{Dynkin}}}, \quad \text{έχουμε και ότι}$$

$$\underbrace{\delta(\mathcal{F})}_{\substack{\text{η μικρότερη} \\ \text{κλάση Dynkin} \\ \text{που περιέχει την } \mathcal{F}}} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$$

⇝ $\underline{\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \delta(\mathcal{F})}$:

<u>Ιδέα</u>: Αν όντως $\sigma(\mathcal{F}) = \delta(\mathcal{F})$, τότε η $\delta(\mathcal{F})$ είναι σ-άλγεβρα... Οπότε, θα δείξουμε ότι όντως η $\delta(\mathcal{F})$ είναι σ-άλγεβρα. Τότε, $\mathcal{F} \subseteq \delta(\mathcal{F}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \delta(\mathcal{F})$.

ΘΔΟ η $\delta(\mathcal{F})$ είναι σ-άλγεβρα. Τότε, αφού $\mathcal{F} \subseteq \underbrace{\delta(\mathcal{F})}_{\text{σ-άλγεβρα}}$, έχουμε αυτόματα ότι $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \delta(\mathcal{F})$.

Η $\delta(\mathcal{F})$ είναι κλάση Dynkin. Άρα, για να δείξουμε ότι είναι σ-άλγεβρα, αρκεί ΝΔΟ είναι <u>άλγεβρα</u>.

Πράγματι: (1) $\emptyset \in \delta(\mathcal{F})$, (2) Αν $A \in \delta(\mathcal{F}) \Rightarrow X \setminus A \in \delta(\mathcal{F})$

(ιδιότητες οποιασδήποτε κλάσης Dynkin στο X).

Άρα, παραμένει Ν.Δ.Ο.

$\boxed{(3)\ \text{Αν } A, B \in \delta(\mathcal{F}),\ \text{τότε } A \cap B \in \delta(\mathcal{F})}$

(δηλ. ότι η $\delta(\mathcal{F})$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές).

<u>Ιδέα</u>

Αφού δεν έχουμε κάποιο χαρακτηρισμό των στοιχείων της $\delta(\mathcal{F})$ πρέπει να βρούμε κάποιο "έμμεσο" τρόπο να δείξουμε το (3) (δεν ξέρουμε "με τι μοιάζει" το $A \cap B$ όταν $A, B \in \delta(\mathcal{F})$). Θα φτιάξουμε μία συλλογή από τα "καλά" υποσύνολα A του X, που "τέμνουν καλά" <u>κάθε</u> $B \in \delta(\mathcal{F})$

((με την έννοια ότι $A \cap B \in \delta(\mathcal{F})$ $\forall B \in \delta(\mathcal{F})$).
Και θα δείξουμε ότι $\delta(\mathcal{F}) \subseteq$ σε αυτή τη συλλογή.)

Ορίζουμε $\mathcal{G}(\mathcal{F}) := \{A \subseteq X : \boxed{\forall B \in \delta(\mathcal{F}) \text{ ισχύει ότι } A \cap B \in \delta(\mathcal{F})}\}$.

τα "καλά" υποσύνολα του X.

το A "τέμνει καλά" κάθε $B \in \delta(\mathcal{F})$.

Τώρα, για να δείξουμε το (3), αρκεί να δείξουμε ότι $\delta(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{F})$.

τα στοιχεία της $\delta(\mathcal{F})$ είναι όλα "καλά",
δηλ. όταν τμήσουμε οποιοδήποτε με άλλο στοιχείο της $\delta(\mathcal{F})$, προκύπτει πάλι στοιχείο της $\delta(\mathcal{F})$.

Για να δειχθεί αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι

$\boxed{(i)}$ Η $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ είναι κλάση Dynkin,

και $\boxed{(ii)}$ $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{F})$.

Δε χρησιμοποιεί ότι η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές

Απόδειξη του $\boxed{(i)}$: (1) $X \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$: $\forall B \in \delta(\mathcal{F})$, ισχύει ότι $X \cap B = B \in \delta(\mathcal{F})$.

(2) Έστω $\underbrace{A_1, A_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{F})}$ με $A_1 \subseteq A_2$. Τότε, $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$:

$\left(\begin{matrix} A_1 \cap B,\ A_2 \cap B \in \delta(\mathcal{F}) \\ \forall B \in \delta(\mathcal{F}) \end{matrix}\right)$

$\forall B \in \delta(\mathcal{F})$, $(A_2 \setminus A_1) \cap B = \underbrace{(A_2 \cap B)}_{\in \delta(\mathcal{F})} \setminus \underbrace{(A_1 \cap B)}_{\in \delta(\mathcal{F})} \in \delta(\mathcal{F})$, αφού $A_1 \cap B,\ A_2 \cap B \ \in \delta(\mathcal{F})$, (αφού $A_1, A_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$)

$A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B$

και η $\delta(\mathcal{F})$ είναι κλάση Dynkin.

(3) Έστω $(A_n)_{n=1}^{+\infty} \nearrow$ στην $\mathcal{G}(\mathcal{F})$. Τότε,

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$. Πράγματι, $\forall B \in \delta(\mathcal{F})$,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(A_n \cap B)}_{\substack{\in \delta(\mathcal{F}),\ \text{αφού} \\ A_n \in \mathcal{G}(\mathcal{F})}} \in \delta(\mathcal{F}),$$

αφού $(A_n \cap B)_{n=1}^{+\infty} \nearrow$ στην κλάση Dynkin $\delta(\mathcal{F})$.

→ Απόδειξη του $\boxed{(ii)}$: χρησιμοποιεί ότι η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές

Ιδέα

Θέλουμε ΝΔΟ $\forall A \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \delta(\mathcal{F})$, έχουμε: $A \cap B \in \delta(\mathcal{F})$. Και πάλι, αφού δεν ξέρουμε "με τι μοιάζουν" τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ και της $\delta(\mathcal{F})$, αυτό θα το καταφέρουμε με έμμεσο τρόπο. Θα σταθεροποιήσουμε κάθε $B \in \mathcal{F}$, και θα δείξουμε ότι όλα τα σύνολα της $\delta(\mathcal{F})$ το "τέμνουν καλά", δηλ. ότι $A \cap B \in \delta(\mathcal{F})\ \forall A \in \delta(\mathcal{F})$.

Έστω $B \in \mathcal{F}$. ΘΔΟ: $\forall A \in \delta(\mathcal{F})$, έχουμε ότι $A \cap B \in \delta(\mathcal{F})$.

Ορίζουμε $\mathcal{G}_B := \{A \subseteq X : A \cap B \in \delta(\mathcal{F})\}$.

τα σύνολα που είναι "καλά ως προς το B", δηλ. "τέμνουν καλά" το B.

Θέλουμε ΝΔΟ: $\delta(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{G}_B$ (πράγματι, αυτό θα σημαίνει ότι κάθε $A \in \delta(\mathcal{F})$ "τέμνει καλά" το φιξαρισμένο μας $B \in \mathcal{F}$, δηλ. ότι $A \cap B \in \delta(\mathcal{F})$ $\forall A \in \delta(\mathcal{F})$.)

Αρκεί ΝΔΟ. (i) $\mathcal{G}_B$ είναι κλάση Dynkin

και (ii) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}_B$.

Αυτό κάνει τη ζωή μας εύκολη. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{F}$ τέμνει καλά το $B \in \mathcal{F}$, παρά κάθε $B \in \delta(\mathcal{F})$. Αυτό εξηγεί τη μεθοδολογία μας.

(ii): Προκύπτει αυτόματα από το ότι η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές: Έστω $A \in \mathcal{F}$. Αφού και $B \in \mathcal{F}$, έχουμε ότι $A \cap B \underbrace{\in \mathcal{F}}_{\text{κλειστότητα της } \mathcal{F}} \subseteq \delta(\mathcal{F})$.

Άρα, $A \in \mathcal{G}_B$.

(i) Οι 3 ιδιότητες στον ορισμό της κλάσης Dynkin ικανοποιούνται από τη $\mathcal{G}_B$:

(1) $X \in \mathcal{G}_B$: $X \cap B = B \in \mathcal{F} \subseteq \delta(\mathcal{F}) \Longrightarrow X \in \mathcal{G}_B$.

(2) Έστω $\underbrace{A_1, A_2 \in \mathcal{G}_B}_{A_1 \cap B,\ A_2 \cap B \in \delta(\mathcal{F})}$, $A_1 \subseteq A_2$. Τότε, $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{G}_B$,

επειδή: $(A_2 \setminus A_1) \cap B = (A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) \in \delta(\mathcal{F})$,

$$\left.\begin{array}{r} \text{αφού } A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B, \\ A_1 \cap B,\ A_2 \cap B \in \delta(\mathcal{F}) \\ \text{και } \delta(\mathcal{F}) \text{ είναι Dynkin.} \end{array}\right\}$$

③ Έστω $(A_n)_{n=1}^{+\infty} \nearrow$ στο G_B. Τότε, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in G_B$:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(A_n \cap B)}_{\in \delta(\mathcal{F}),\ \text{αφού } A_n \in G_B} \in \delta(\mathcal{F}), \text{ αφού}$$

η $(A_n \cap B)_{n=1}^{+\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων στην κλάση Dynkin $\delta(\mathcal{F})$.

→ $\boxed{\text{Μέτρα:}}$

→ <u>Ορισμός</u> (Μέτρο): Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο X. Μια συνάρτηση $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ είναι μέτρο (στο X) αν:

(α) $\mu(\emptyset) = 0$, και

(β) Αν $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι μία ακολουθία <u>ξένων</u> συνόλων του $\mathcal{A}$, τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$

→ (αριθμήσιμη προσθετικότητα)

Λέμε ότι ο χώρος $(X, \mathcal{A})$ (ο χώρος X εφοδιασμένος με τη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$) είναι <u>μετρήσιμος</u>, και ότι ο χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (επιπλέον εφοδιασμένος με συγκεκριμένο μέτρο μ πάνω στην $\mathcal{A}$) είναι <u>χώρος μέτρου</u>.

Κάθε $A \in \mathcal{A}$ λέγεται <u>$\mathcal{A}$-μετρήσιμο</u>, και αν $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ είναι μέτρο, τότε κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι <u>μ-μετρήσιμο</u>.