→ <u>Παραδείγματα:</u>

① (Μέτρο απαρίθμησης) Στο $\mathbb{N}$ (↗ ή σε οποιοδήποτε $X \neq \emptyset$!), θεωρούμε $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ και ορίζουμε $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ με

$$\underbrace{\mu(A) := \# A}_{\substack{\text{πληθάριθμος} \\ (\text{στο } [0,+\infty])}} = \begin{cases} m, & \text{αν το } A \text{ έχει } m \ (\in \mathbb{N} \cup \{0\}) \text{ στοιχεία} \\ +\infty, & \text{αν το } A \text{ είναι άπειρο.} \end{cases}$$

Το μ είναι <u>μέτρο</u>, και λέγεται <u>μέτρο απαρίθμησης</u>.

<u>Απόδειξη:</u> • $\mu(\emptyset) = 0$, καθώς το $\emptyset$ έχει 0 στοιχεία.

• Έστω $A_1, A_2, \ldots \subseteq \mathbb{N}$ ξένα.

⇝ Αν έστω και ένα από τα A_n είναι άπειρο, τότε η $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι επίσης άπειρη, άρα

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = +\infty = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

⇝ Αν όλα τα A_n είναι πεπερασμένα, τότε:

• Αν μόνο πεπερασμένα το πλήθος A_n (είναι $\neq \emptyset$ (έχουν μη μηδενικό πληθάριθμο)), τότε η $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι πεπερασμένη, και ο πληθάριθμός της είναι το άθροισμα των πληθαρίθμων αυτών των μη κενών A_n (και άρα όλων των A_n).

- Αν άπειρα από τα A_n είναι $\neq \emptyset$, τότε καθε ένα από αυτά έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο. Και αφού είναι ξένα, η $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι άπειρη.

Επίσης, το άθροισμα των πληθαρίθμων των μη κενών A_n είναι $\geq \sum_{\text{για άπειρα } n} 1 = +\infty$.

Άρα, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A) = +\infty$.

(2) Έστω $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Το $\nu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$

με
$$\nu(A) = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } A = \emptyset \\ +\infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι μέτρο (Άσκηση).

(3) Έστω $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$ και $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

Το $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ με

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_0 \in A \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι μέτρο. Λέγεται το μέτρο Dirac στο x_0.
(Άσκηση)

→ <u>Βασικές ιδιότητες μέτρων:</u> Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

① Αν $A_1, \dots, A_n$ είναι ξένα σύνολα στην $\mathcal{A}$,

τότε $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$.

→ (πεπερασμένη προσθετικότητα)

<u>Απόδ.:</u> Τα $A_1, A_2, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots$ είναι ξένα σύνολα στην $\mathcal{A}$. Από αριθμήσιμη προσθετικότητα του μ,

$$\mu(\underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots}_{= A_1 \cup \dots \cup A_n}) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) + \cancel{\mu(\emptyset)}^{0} + \cancel{\mu(\emptyset)}^{0} + \cancel{\dots}^{0}$$

$$= \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

⚠ Μια $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ που ικανοποιεί ότι

(α) $\mu(\emptyset) = 0$ και

(β') (πεπερασμένη προσθετικότητα) Αν $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ξένα, τότε $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$

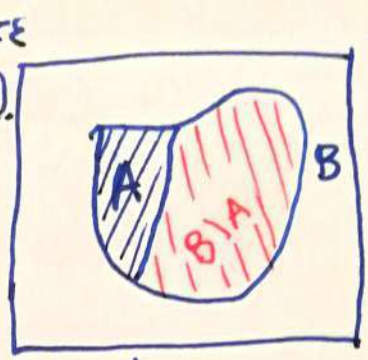
λέγεται <u>πεπερασμένα προσθετικό μέτρο</u> (και δεν είναι αναγκαστικά μέτρο). → (Άσκηση!)

Κάθε μέτρο είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο (το δείξαμε στο ①).

(2) Αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \subseteq B$, τότε $\mu(A) \le \mu(B)$.

(Μονοτονία) <u>Και</u>: Αν $\mu(A) < +\infty$, τότε

$$\underline{\mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A)}. \quad (*)$$



<u>Απόδ</u>: $B = A \cup \underbrace{(B\setminus A)}_{\in \mathcal{A}}$,

και A, $B\setminus A$ ξένα στοιχεία της $\mathcal{A}$.

Άρα, από πεπερασμένη προσθετικότητα,

$$\mu(B) \overset{(*)}{=} \mu(A) + \underbrace{\mu(B\setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A).$$

(3) Αν μ, ν είναι μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$, και $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, τότε οι συναρτήσεις $\underline{\mu+\nu}$, $\underline{a\cdot\mu}$ είναι επίσης μέτρα στον $(X,\mathcal{A})$.

$$\boxed{\begin{aligned} (\mu+\nu)(A) &:= \mu(A)+\nu(A), \\ (a\cdot\mu)(A) &:= a\cdot\mu(A), \\ (\nu-\mu)(A) &:= \nu(A)-\mu(A), \\ &\forall A \in \mathcal{A}. \end{aligned}}$$

ώστε $\nu-\mu \geq 0$.

Αν επίσης $\boxed{\mu(A) \le \nu(A)}$ $\forall A \in \mathcal{A}$

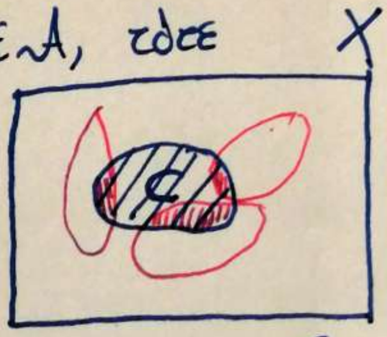
και $\boxed{\mu(A) < +\infty}$ $\forall A \in \mathcal{A}$,

τότε η $\underline{\nu-\mu}$ είναι και αυτή μέτρο στον $(X,\mathcal{A})$.

για να αποφευχθεί απροσδιοριστία του τύπου "$(+\infty) - (+\infty)$".

(4) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν $C \in \mathcal{A}$, τότε η συνάρτηση $\mu_C : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$

με $\mu_C(A) := \mu(C\cap A)$

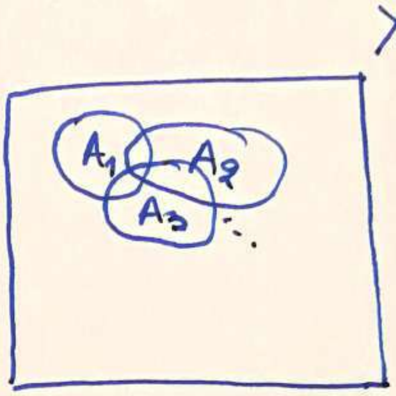


είναι μέτρο, και λέγεται <u>ο περιορισμός του μ στο C</u>.

5) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Έστω $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$. Τότε,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

(Αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα)



Αποδ.: Ορίζουμε

$B_1 := A_1 \in \mathcal{A}$

$B_2 := A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A}$

$B_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \in \mathcal{A}$

$\vdots$

$B_n := A_n \setminus \underbrace{(A_1 \cup \dots \cup A_n)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ($\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα).

Τα B_n είναι ξένα σύνολα στην $\mathcal{A}$.

$$\xrightarrow[\text{προσθετικότητα}]{\text{αριθμήσιμη}} \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)}_{= \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\mu(B_n)}_{\leq \mu(A_n)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

$\leq \mu(A_n)$, αφού $B_n \subseteq A_n$ (μονοτονία)

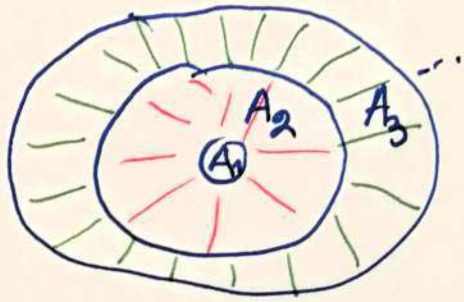
6) (Συνέχεια του μέτρου) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

(α) Έστω $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Τότε, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$.

(b) Έστω $(B_n)_{n=1}^{+\infty}$ φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mu(B_1)<+\infty$. Τότε,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$$

Απόδ.: (α) Προς το παρόν γνωρίζουμε πώς να υπολογίσουμε το μέτρο ξένης ένωσης. Οπότε, θα γράψουμε την $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ως ξένη ένωση:



$B_1 := A_1 \in \mathcal{A}$.

$B_2 := A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A}$

$B_3 := A_3 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$

$\vdots$

$B_n := A_n \setminus A_{n-1} \in \mathcal{A}, \ \forall n \geq 2$.

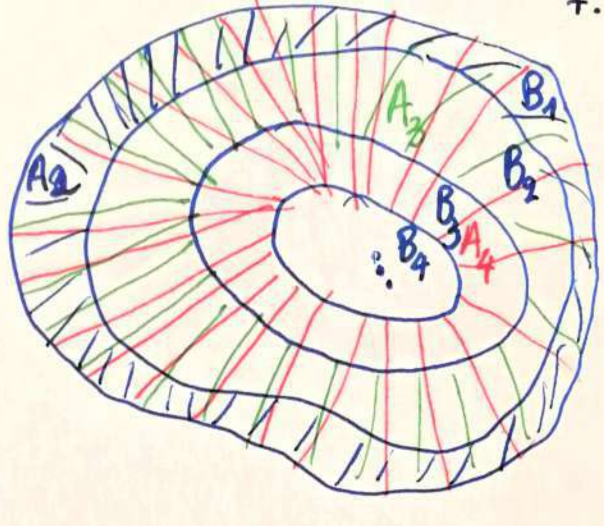
Τα B_n είναι ξένα στοιχεία της $\mathcal{A}$, άρα

$$\mu\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n}_{=\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) = \lim_{k\to+\infty}\big(\mu(B_1)+\ldots+\mu(B_k)\big)$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \mu(\underbrace{B_1 \cup \ldots \cup B_k}_{=A_k})$$

πεπερ. προσθετικότητα (B_i ξένα)

$$= \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).$$



(b) Ορίζουμε

$A_1 := B_1 \setminus B_1 \in \mathcal{A}$

$A_2 := B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{A}, \ \supseteq A_1$

$A_3 := B_1 \setminus B_3 \in \mathcal{A}, \ \supseteq A_2$

$\vdots$

$A_n := B_1 \setminus B_n \in \mathcal{A}, \ \supseteq A_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Η $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, άρα (από το (a)):

$$\mu\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n}_{=\,\bigcup_{n=1}^{+\infty}(B_1\setminus B_n) \,=\, B_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right)}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(\overset{B_1\setminus B_n}{\overset{\shortparallel}{A_n}})$$

,

άρα, από πεπερασμένη προσθετικότητα, (και $\mu(B_1) < +\infty$),

$$\cancel{\mu(B_1)} - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\cancel{\mu(B_1)} - \mu(B_n)\right)$$

$$= \cancel{\mu(B_1)} - \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n),$$

και άρα $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$

⚠ Το (Β) ισχύει αν έστω κάποιο από τα $\mu(B_n)$ είναι $<+\infty$ (στην οποία περίπτωση όλα τα $\mu(B_{n+1}), \mu(B_{n+2}), \ldots$ είναι επίσης $<+\infty$).

Δεν ισχύει όμως αν όλα τα $\mu(B_n)$ είναι $+\infty$:

π.χ. • Θεωρούμε το μέτρο απαρίθμησης ν στο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Τα σύνολα

$\mathbb{N}$,

$2\mathbb{N}$ (άρτιοι)

$2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$ (πολλαπλάσια του 2 και του 3)

$2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N} \cap 5\mathbb{N}$ (—〃— 2, του 3 και του 5)

$\vdots$

$S_k := p_1\mathbb{N} \cap p_2\mathbb{N} \cap \ldots \cap p_k\mathbb{N}$ (πολλαπλάσια των πρώτων k πρώτων αριθμών $p_1, \ldots, p_k$)

είναι άπειρα, άρα $\nu(\overbrace{p_1\mathbb{N} \cap p_2\mathbb{N} \cap \ldots \cap p_k\mathbb{N}}^{S_k}) = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Επίσης, $(S_k)_{k=1}^{+\infty}$ είναι φθίνουσα ακολουθία στο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Δεν ισχύει όμως ότι

$$\nu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} S_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\nu(S_k)}_{=+\infty} = +\infty,$$

επειδή $\bigcap_{k=1}^{+\infty} S_k = \emptyset$ (αποτελείται από τους φυσικούς αριθμούς που διαιρούνται συγχρόνως από όλους τους πρώτους, κ' τέτοιοι αριθμοί δεν υπάρχουν),

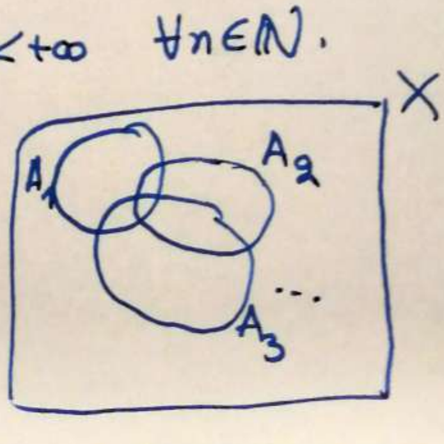
και άρα $\nu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} S_k\right) = 0$.

→ <u>Ειδικές κατηγορίες μέτρων</u>: Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου. Το μ λέγεται:

- <u>πεπερασμένο</u> αν $\mu(X) < +\infty$.
- <u>μέτρο πιθανότητας</u> αν $\mu(X) = 1$.
- <u>σ-πεπερασμένο</u> αν $\exists\, A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$:

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \quad \text{και} \quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Λέμε ότι ο $(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι χώρος πιθανότητας και σ-πεπερασμένος, αντίστοιχα.



προκύπτει ότι τα A_n μπορούν να θεωρηθούν ξένα μεταξύ τους (άσκηση).

Πρόταση: Έστω μ $\boxed{\text{πεπερασμένα προσθετικό μέτρο}}$ στον $(X, \mathcal{A})$ $\hookrightarrow$ σ-άλγεβρα στον X. Αν ισχύει ! κάποιο ! από τα παρακάτω, τότε το μ είναι μέτρο:

(i) $\forall\ (A_n)_{n=1}^{+\infty} \nearrow$ στην $\mathcal{A}$, έχουμε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

(ii) $\forall\ (A_n)_{n=1}^{+\infty} \searrow$ στην $\mathcal{A}$, με $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset$, έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Δηλαδή δε χρειάζεται και να τσεκάρουμε για όλες τις $(A_n)_n \searrow$ στην $\mathcal{A}$ ότι $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)$. Αρκεί να τσεκάρουμε μόνο για τις $(A_n)_n \searrow$ στην $\mathcal{A}$ με $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset$.

Απόδειξη: (i) Το $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο. Άρα, $\mu(\emptyset)=0$ (και $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) =$
$= \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$
$\forall\ A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ξένα).

Οπότε πρέπει ΝΔΟ: $\forall\ (A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$, έχουμε:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$ Έστω τέτοια $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$.