<u>Πρόταση:</u> Έστω μ $\boxed{\text{πεπερασμένα προσθετικό μέτρο}}$ στον $(X, \mathcal{A})$ ↳ σ-άλγεβρα στον X. Αν ισχύει **!κάποιο!** από τα παρακάτω, τότε το μ είναι <u>μέτρο</u>:

(i) $\forall \, (A_n)_{n=1}^{+\infty} \nearrow$ στην $\mathcal{A}$, έχουμε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

(ii) $\forall \, (A_n)_{n=1}^{+\infty} \searrow$ στην $\mathcal{A}$, με $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset$, έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Δηλαδή <u>δε</u> χρειάζεται και να τσεκάρουμε για <u>όλες</u> τις $(A_n)_n \searrow$ στην $\mathcal{A}$ ότι $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. Αρκεί να τσεκάρουμε μόνο για τις $(A_n)_n \searrow$ στην $\mathcal{A}$ με $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset$.

<u>Απόδειξη:</u> (i) Το $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο. Άρα, $\mu(\emptyset) = 0$ (και $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$ $\forall \, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ξένα).

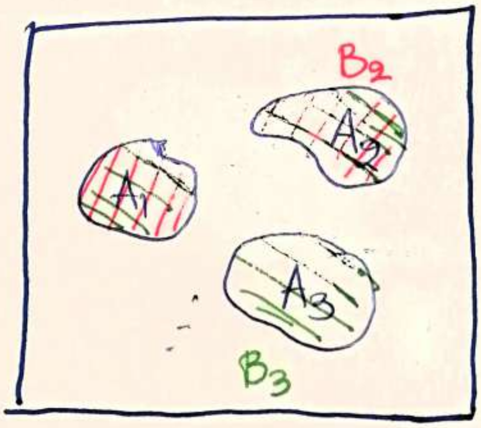
Οπότε πρέπει ΝΔΟ: $\forall \, (A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$, έχουμε:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Έστω τέτοια $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$.

Λόγω του (i), γνωρίζουμε τι συμβαίνει για ενώσεις αυξουσών ακολουθιών (μόνο). Οπότε, θα γράψουμε την ξένη ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ως ένωση αύξουσας ακολουθίας συνόλων:

$$B_1 := A_1$$
$$B_2 := A_1 \cup A_2$$
$$B_3 := A_1 \cup A_2 \cup A_3$$
$$\vdots$$
$$B_n := A_1 \cup \dots \cup A_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



$B_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, και $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$ (δηλαδή $(B_n) \nearrow$ στην $\mathcal{A}$).

Τότε, $$\underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)}_{\substack{\| \\ \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n}} \overset{(i)}{=} \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) =$$

$$\underset{\substack{A_i \text{ ξένα,} \\ \text{πεπ. προσθε-} \\ \text{τικότητα}}}{=} \lim_{n\to+\infty} \left[\mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)\right] \xlongequal[\text{σειράς}]{\text{ορισμός}} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Άρα, το μ είναι μέτρο.

(ii) Ξέρουμε ότι $\mu(\emptyset)=0$. Τώρα:

Έστω $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, ξένα. ΘΔΟ $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)$.

Στο (i), γράψαμε την $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ως ένωση της <u>αύξουσας</u> ακολουθίας $A_1 \subseteq A_1\cup A_2 \subseteq A_1\cup A_2\cup A_3 \subseteq \dots$

Τα συμπληρώματα αυτών των συνόλων, μέσα στην $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, αποτελούν <u>φθίνουσα</u> ακολουθία:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \supseteq \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)\setminus A_1}_{=\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n} \supseteq \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)\setminus (A_1\cup A_2)}_{=\bigcup_{n=3}^{+\infty} A_n} \supseteq \dots$$

Έτσι, ορίζουμε
$$B_1 := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$
$$B_2 := \bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n,$$
$$\vdots$$
$$B_k := \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n, \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Έχουμε: $(B_k)_{k=1}^{+\infty}$ φθίνουσα ακολουθία <u>στην $\mathcal{A}$</u>.

Επίσης, $\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k = \emptyset$: [Πράγματι, έστω ότι $\exists x\in\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k$.

Τότε, το x ανήκει σε όλα τα $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_k$.

Συγκεκριμένα, το x ανήκει και στο $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_k$,

άρα ανήκει σε <u>κάποιο</u> A_{n_0}. Τότε όμως το x

δεν ανήκει σε κανένα από τα $A_{n_0+1}, A_{n_0+2}, A_{n_0+3}, \ldots$, καθώς τα A_n είναι ξένα. Άρα, $x \notin \bigcup_{k=n_0+1}^{+\infty} A_k = B_{n_0+1}$, άτοπο (αφού $x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k$). Άρα, $\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k = \emptyset$.].

Άρα, $\lim_{k\to+\infty} \mu(B_k) = 0$, δηλαδή $\lim_{k\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right) = 0$.

Συγχρόνως, $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} A_n\right) \cup \underbrace{\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right)}_{B_k}$

ξένα στην A!

Οπότε, από πεπερασμένη προσθετικότητα του μ:

$$\underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)}_{\text{σταθερά ως προς } k} = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k-1} A_n\right) + \mu(B_k)$$

$$\underset{\substack{A_1,\ldots,\\ A_{k-1}\\ \text{ξένα,}\\ \text{πεν. προσθ.}}}{=} \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_{k-1}) + \mu(B_k), \quad \forall k \geq 2$$

$$\xrightarrow[k\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) + 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Άρα, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Οπότε, το μ είναι μέτρο.

Ερώτημα: Πώς μπορούμε να τσεκάρουμε αν δύο μέτρα είναι ίσα;

Συγκεκριμένα, αν δύο μέτρα συμφωνούν πάνω σε μια οικογένεια $\mathcal{F}$, τότε συμφωνούν και στην (πιο περίπλοκη) $\sigma(\mathcal{F})$;

Υπό συνθήκες ναι:

Πρόταση: Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, με $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$, όπου $\overset{\neq \emptyset}{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Έστω μ, ν μέτρα στον $(X, \underset{\sigma(\mathcal{F})}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{A}}})$, με

$$\boxed{\mu(F) = \nu(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}.}$$

Αν η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές (δηλ. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$)

και

ή (a) ($\overset{\text{Αν}}{\mu, \nu}$ πεπερασμένα) $\mu(X) = \nu(X) < +\infty$

ή (b) ($\overset{\text{Αν}}{\mu, \nu}$ σ-πεπερασμένα) $\exists\, (F_n) \nearrow$ στην $\mathcal{F}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ και $\mu(F_n)\ (= \nu(F_n)) < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{TOTE}}$

$$\boxed{\mu(A) = \nu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})}$$

$\boxed{\text{Αν ισχύει το (α):}}$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $G := \{A \in \mathcal{A} (= \sigma(\mathcal{F})) : \mu(A) = \nu(A)\}$.

Θέλουμε: $G = \mathcal{A}$ $(= \sigma(\mathcal{F}))$.

Αφού $G \subseteq \mathcal{A}$, αρκεί ΝΔΟ $\underset{(\overset{\shortparallel}{\sigma(\mathcal{F})})}{\mathcal{A}} \subseteq G$.

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{F} \subseteq G$: $\forall F \in \mathcal{F}$, έχουμε

$F \in \underset{\overset{\shortparallel}{\mathcal{A}}}{\sigma(\mathcal{F})}$ και $\mu(F) = \nu(F)$ (από υπόθεση).

Άρα, για να δείξουμε ότι $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq G$, αρκεί ΝΔΟ η G είναι σ-άλγεβρα. Θα κάνουμε όμως κάτι πιο απλό: Αφού η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές, έχουμε

$$\sigma(\mathcal{F}) = \delta(\mathcal{F})$$

Άρα, ξέρουμε ότι $\mathcal{F} \subseteq G$ και θέλουμε: $\delta(\mathcal{F}) \subseteq G$.

Αρκεί λοιπόν ΝΔΟ. η G είναι <u>κλάση Dynkin</u> (που είναι απλούστερο από το ΝΔΟ είναι σ-άλγεβρα εν γένει, καθώς οι κλάσεις Dynkin είναι περισσότερες)

Πράγματι:

- $X \in \mathcal{G}$: $\underset{\sigma(\mathcal{F})}{\overset{}{X \in \underset{\shortparallel}{\mathcal{A}}}}$, και $\mu(X)=\nu(X)$, λόγω της υπόθεσης (α).

- Έστω $A \subseteq B$ με $\underbrace{A, B \in \mathcal{G}}_{\substack{A, B \in \mathcal{A}, \\ \mu(A)=\nu(A), \\ \mu(B)=\nu(B)}}$. ΘΔΟ $B \setminus A \in \mathcal{G}$.

Αφού $A, B \in \mathcal{A} \longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{A}$. Και:

$$\mu(B \setminus A) \overset{A \subseteq B}{\underset{\substack{\mu(B)<+\infty \\ \text{λόγω του} \\ (\alpha)}}{=\!=}} \mu(B)-\mu(A) \overset{A,B \in \mathcal{G}}{=\!=} \nu(B)-\nu(A) \overset{A \subseteq B}{\underset{\substack{\nu(B)<+\infty \\ \text{λόγω του} \\ (\alpha)}}{=\!=}} \nu(B \setminus A).$$

- Έστω $(A_n)_n \nearrow \underbrace{\text{στην } \mathcal{G}}_{\substack{A_n \in \mathcal{A} \\ \text{και } \mu(A_n)=\nu(A_n). \\ \forall n \in \mathbb{N}}}$. ΘΔΟ $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{G}$.

$A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Και:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \overset{\mu \text{ μέτρο}}{\underset{\substack{(A_n)_n \nearrow \\ \text{στην } \mathcal{A}}}{=\!=}} \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{\substack{\shortparallel \\ \nu(A_n)}} = \lim_{n \to +\infty} \nu(A_n) \overset{\nu \text{ μέτρο}}{\underset{\substack{(A_n) \nearrow \text{στην} \\ \mathcal{A}}}{=\!=}} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

Άρα, η $\mathcal{G}$ είναι κλάση Dynkin

(και η απόδειξη ολοκληρώθηκε).

$\boxed{\text{Αν ισχύει το (β):}}$ Θα χρησιμοποιήσουμε το (α) για τα μ, ν περιορισμένα σε κάθε F_n:

$\forall n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $\mu_n, \nu_n : \underset{\sigma(\mathcal{F})}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{A}}} \longrightarrow [0, +\infty]$,

$$\text{με} \quad \mu_n(A) = \mu(A \cap F_n)$$
$$\nu_n(A) = \nu(A \cap F_n)$$

Αυτά είναι μέτρα (τα μέτρα περιορισμού στο F_n). Επίσης:

① Τα μ_n, ν_n συμφωνούν στην $\mathcal{F}$: $\forall F \in \mathcal{F}$,

$$\mu_n(F) = \mu(\underbrace{F \cap F_n}_{\substack{\in \mathcal{F}, \\ \text{αφού } \mathcal{F} \text{ κλειστή} \\ \text{ως προς πεπ.} \\ \text{τομές}}}) \xlongequal[\text{στην } \mathcal{F}]{\text{τα } \mu, \nu \text{ συμφωνούν}} \nu(F \cap F_n) = \nu_n(F).$$

και ② $\mu_n(X) = \nu_n(X) < +\infty$:

$$\mu_n(X) = \mu(X \cap F_n) = \mu(F_n) \xlongequal[\text{φωνούν στην } \mathcal{F}]{\text{τα } \mu, \nu \text{ συμ-}} \nu(F_n) = \nu(X \cap F_n) = \nu_n(X)$$

Και: $\mu(F_n)$ $(= \nu(F_n)) < +\infty$ λόγω υπόθεσης (β), άρα

$\mu_n(X) = \nu_n(X) < +\infty.$

Οπότε, τα μ_n, ν_n ικανοποιούν τις υποθέσεις της Πρότασης για πεπερασμένα μέτρα $\Longrightarrow$ από αυτό που έχουμε ήδη δείξει,

$$\mu_n(A) = \nu_n(A) \quad \forall A \in \underset{\sigma(\mathcal{F})}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{A}}},$$

δηλαδή

$$\boxed{\mu(A\cap F_n) = \nu(A\cap F_n) \quad \forall A \in \underset{\sigma(\mathcal{F})}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{A}}}} \quad (*)$$

$$\forall n\in\mathbb{N}$$

αυτό είναι που μάς ενδιαφέρει από εδώ και πέρα - ξεχνάμε πλέον τα μέτρα περιορισμού.

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\mu(A) = \nu(A) \quad \forall A\in\mathcal{A},$$

καθώς το A μπορεί να "προσεγγιστεί" από την αύξουσα ακολουθία $(A\cap F_n)_n$. Πράγματι: $\forall A\in\mathcal{A}$, $A = A\cap X = A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(A\cap F_n)$, όπου η $(A\cap F_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι <u>αύξουσα</u> ακολουθία στην $\mathcal{A}=\sigma(\mathcal{F})$. Άρα, από συνέχεια των μέτρων,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A\cap F_n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\mu(A\cap F_n)}_{\overset{(*)}{=}\ \nu(A\cap F_n)}$$

$$= \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A\cap F_n)\right) = \nu(A).$$

■

<u>Εφαρμογές:</u> (1) Έστω μ, ν μέτρα στη $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, με την ιδιότητα ότι $\mu\big((-\infty, a]\big) = \nu\big((-\infty, a]\big) < +\infty$ $\forall a\in\mathbb{R}$.

<u>Τότε</u>, $\mu = \nu$ σε <u>όλη</u> τη $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\mathcal{F} := \{(-\infty, a] : a\in\mathbb{R}\}$.

Ξέρουμε ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F})$. Επίσης:

το βασικό

- $\boxed{\mu = \nu \text{ στην } \mathcal{F}}$ (καθώς από υπόθεση συμφωνούν στις ημιευθείες).

1ο έξτρα

- $\mathcal{F}$ κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές, καθώς $\forall\, a, b\in\mathbb{R}$ με $a<b$, $(-\infty, a] \cap (-\infty, b] = (-\infty, a]$ (η τομή ημιευθειών λοιπόν είναι πάλι ημιευθεία).

• Έχουμε ότι $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (-\infty, n]$, όπου $\left((-\infty,n]\right)_{n=1}^{+\infty}$

2ο έξτρα

είναι αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{F}$, με

$$\mu\left((-\infty,n]\right) = \nu\left((-\infty,n]\right) < +\infty .$$

Άρα, $\mu = \nu$ σε όλη τη $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

(2) Έστω μ, ν μέτρα στη $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, με την ιδιότητα ότι: τα μ, ν συμφωνούν πάνω στην $\mathcal{F} := \{$πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων$\}$,

και $\mu([-n,n]) \ (= \nu([-n,n])) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Τότε, $\mu = \nu$ σε όλη την $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Απόδειξη:

$\boxed{\bullet \quad \mu = \nu \text{ στην } \mathcal{F}}$

το βασικό

• Η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές,

1ο έξτρα

επειδή είναι άλγεβρα (το δείξαμε στο παρελθόν).

2ο έλεγχος

Ισχύει ότι $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n,n]$, όπου η $\left([-n,n]\right)_{n=1}^{+\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{F}$, με

$$\mu\left([-n,n]\right) \left(= \nu\left([-n,n]\right)\right) < +\infty$$

Άρα, $\mu = \nu$ σε όλη τη $\sigma(\mathcal{F})$.

Και: $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

Ξέρουμε ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\Delta)$, όπου

$$\Delta := \{ [a,b] : a < b \text{ στο } \mathbb{R} \}.$$

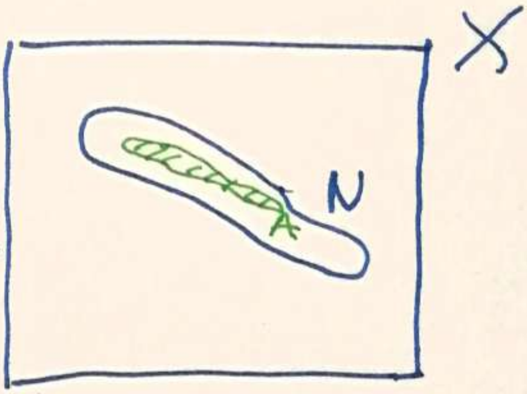
Άρα, θέλουμε: $\boxed{\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\Delta)}$:

⇝ $\sigma(\Delta) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, επειδή $\Delta \subseteq \mathcal{F} \subseteq \overbrace{\sigma(\mathcal{F})}^{\sigma\text{-άλγ.}}$

$\Rightarrow \sigma(\Delta) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$.

⇝ $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\Delta)$: Κάθε διάστημα ανήκει στη $\underbrace{\sigma(\Delta)^{\text{“}\mathcal{B}(\mathbb{R})}}_{\sigma\text{-άλγ.}}$, άρα κάθε πεπερασμένη ένωση διαστημάτων ανήκει στη $\sigma(\Delta)$, δηλ. $\mathcal{F} \subseteq \underbrace{\sigma(\Delta)}_{\sigma\text{-άλγ.}}$. Οπότε, $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\Delta)$. ∎

→ <u>Πλήρωση χώρου μέτρου</u>: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, και έστω



$N \in \mathcal{A}$ με $\mu(N) = 0$ (N "μικρό").

Θα θέλαμε να μπορούμε να πούμε ότι κάθε υποσύνολο $A \subseteq N$ είναι <u>και</u> αυτό "μικρό", δηλ. ότι $\mu(A) = 0$.

<u>Όμως</u> δεν μπορούμε να πούμε κάτι τέτοιο, επειδή δεν ισχύει αναγκαστικά ότι κάθε $A \subseteq N$ ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ (δηλ. μπορεί το $\mu(A)$ να μην <u>ορίζεται</u>).

Έτσι, δεδομένου του $(X, \mathcal{A}, \mu)$, θα θέλαμε να δημιουργήσουμε μία <u>μεγαλύτερη</u> σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_\mu$, που θα περιέχει όλα τα $A \subseteq N$ $\boxed{\forall\, N \in \mathcal{A} \text{ με } \mu(N) = 0}$,

και μία <u>επέκταση</u> $\bar{\mu}$ του μ, που θα είναι μέτρο σε <u>όλη</u> την $\mathcal{A}_\mu$ (και άρα θα αποδίδει μέτρο 0 σε όλα τα παραπάνω "μικρά" A).

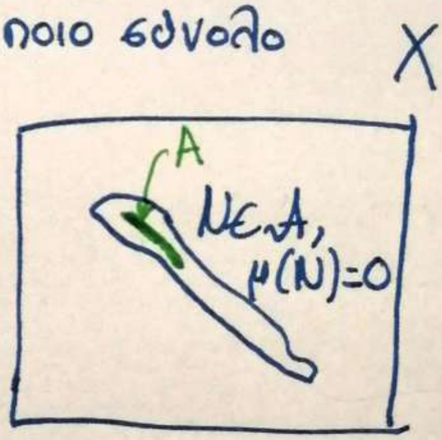
Ο χώρος $(X, \mathcal{A}_\mu, \bar{\mu})$ θα κατασκευαστεί, και θα τον αποκαλούμε <u>πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.</u>

→ <u>Ορισμός:</u> Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

- Ένα $A \subseteq X$ λέγεται μ-μηδενικό αν $\exists\, N \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(N) = 0$ και $A \subseteq N$.

  (δηλ., αν το A περιέχεται σε κάποιο σύνολο μέτρου μ μηδέν).

  Ένα μ-μηδενικό $\in X$ <u>δεν</u> ανήκει <u>αναγκαστικά</u> στην $\mathcal{A}$!



- Ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται <u>πλήρης</u> αν κάθε μ-μηδενικό σύνολο $A \subseteq X$ <u>ανήκει</u> στην $\mathcal{A}$.

  Τότε, αυτόματα !$\mu(A) = 0$!

  (δηλ., αν $\forall\, N \in \mathcal{A}$ με $\mu(N) = 0$, όλα τα υποσύνολα του N ανήκουν και αυτά στην $\mathcal{A}$).

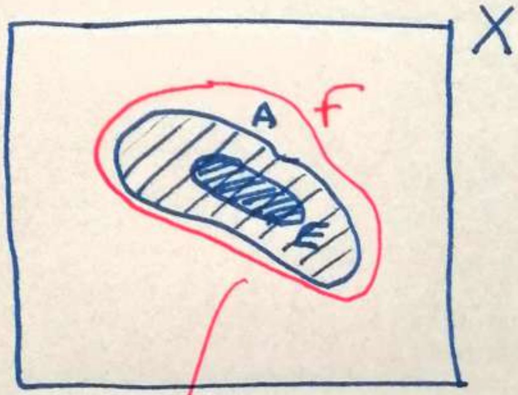
→ Ορισμός (πλήρωση): Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

Ορίζουμε:

① $\mathcal{A}_\mu := \{ A \subseteq X :$ υπάρχουν $E, F \in \mathcal{A}$: $E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0 \}$.

τα σύνολα που διαφέρουν από στοιχεία της $\mathcal{A}$ κατά μ-μηδενικό σύνολο! Δηλ. τα σύνολα της μορφής $E \cup K$, όπου $E \in \mathcal{A}$ και K υποσύνολο κάποιου $N \in \mathcal{A}$ με $\mu(N) = 0$.

(Άσκηση)



$A = E \sqcup \underbrace{(A \setminus E)}_{= K}$,

$K \subseteq \underbrace{F \setminus E}_{\in \mathcal{A}}$, $\mu(F \setminus E) = 0$

⚠ Τότε, $\mu(E) = \mu(F)$: $\mu(F) = \mu(E) + \underbrace{\mu(F \setminus E)}_{= 0} = \mu(E)$.

(2) $\bar{\mu} : \mathcal{A}_\mu \longrightarrow [0,+\infty]$, με $\bar{\mu}(A) := \mu(E)$,
$\forall A, E$ όπως στο (1).

⚠ Ο ορισμός είναι καλός. Πράγματι, έστω $A \in \mathcal{A}_\mu$,

με $E \subseteq A \subseteq F$ όπου $E, F \in \mathcal{A}$ και $\mu(F \setminus E) = 0$,

αλλά και

με $E' \subseteq A \subseteq F'$ όπου $E', F' \in \mathcal{A}$ και $\mu(F' \setminus E') = 0$.

Πρέπει ΝΔΟ $\mu(E) = \mu(E')$. Πράγματι,

$$\mu(E) = \mu(F) \underset{\substack{F \supseteq A \supseteq E' \\ F,\, E' \in \mathcal{A}}}{\geq} \mu(E') = \mu(F') \underset{\substack{F' \supseteq A \supseteq E \\ F',\, E \in \mathcal{A}}}{\geq} \mu(E),$$

άρα $\mu(E) = \mu(E')$.

⚠ Αν $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq \overset{\in \mathcal{A}_\mu}{A}$, τότε $\mu(B) \leq \bar{\mu}(A)$:

$\exists\, E, F \in \mathcal{A}$ με $E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$.

Τότε, $\underbrace{B\ (\subseteq A) \subseteq F}_{\in \mathcal{A}} \Rightarrow \mu(B) \leq \mu(F) = \bar{\mu}(A)$.

Άρα: $\boxed{\bar{\mu}(A) = \underline{\max}\{\mu(B) : B \in \mathcal{A},\ B \subseteq A\}}$

κάποιο από αυτά τα B είναι το παραπάνω $E \in \mathcal{A}$, και $\mu(E) = \bar{\mu}(A)$.

Το $\bar{\mu}$ λέγεται <u>πλήρωση του μ</u>, και ο χώρος $(X, \mathcal{A}_\mu, \bar{\mu})$ λέγεται <u>πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.</u>

→ <u>Θεώρημα</u>: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Τότε:

① $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$, $\bar{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$ (το $\bar{\mu}$ είναι επέκταση του μ).

② Η $\mathcal{A}_\mu$ είναι σ-άλγεβρα.

③ Το $\bar{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο.

(ο $(X, \mathcal{A}_\mu, \bar{\mu})$ είναι πλήρης χώρος μέτρου.)

④ Το $\bar{\mu}$ είναι το <u>μοναδικό</u> μέτρο στην $\mathcal{A}_\mu$ με $\bar{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$.

(Κάθε επέκταση (μέτρο) του μ σε όλη την $\mathcal{A}_\mu$ είναι <u>αναγκαστικά</u> το πλήρες μέτρο $\bar{\mu}$.)

⑤ Το μ είναι πλήρες $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$ (και άρα $\mu = \bar{\mu}$).

(δηλ. μ πλήρες $\Leftrightarrow$ δε χρειάζεται να προσθέσουμε τίποτα στην $\mathcal{A}$ – ήδη περιέχει τα μ-μηδενικά σύνολα).