Το $\bar{\mu}$ λέγεται <u>πλήρωση του μ</u>, και ο χώρος $(X, \mathcal{A}_\mu, \bar{\mu})$ λέγεται <u>πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.</u>

→ <u>Θεώρημα</u>: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Τότε:

(1) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$, $\bar{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$ (το $\bar{\mu}$ είναι επέκταση του μ).

(2) Η $\mathcal{A}_\mu$ είναι σ-άλγεβρα.

(3) Το $\bar{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο.

(ο $(X, \mathcal{A}_\mu, \bar{\mu})$ είναι πλήρης χώρος μέτρου.)

(4) Το $\bar{\mu}$ είναι το <u>μοναδικό</u> μέτρο στην $\mathcal{A}_\mu$ με $\bar{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$.

(Κάθε επέκταση (μέτρο) του μ σε όλη την $\mathcal{A}_\mu$ είναι <u>αναγκαστικά</u> το πλήρες μέτρο $\bar{\mu}$.)

(5) Το μ είναι πλήρες $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$ (και άρα $\mu = \bar{\mu}$).

(δηλ. μ πλήρες $\Leftrightarrow$ δε χρειάζεται να προσθέσουμε τίποτα στην $\mathcal{A}$ – ήδη περιέχει τα μ-μηδενικά σύνολα).

Απόδειξη: 1 Έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε:

- $A \in \mathcal{A}_\mu$: Για $E = F = A \in \mathcal{A}$, έχουμε:

$$\underbrace{E}_{\in \mathcal{A}} \subseteq A \subseteq \underbrace{F}_{\in \mathcal{A}} \quad \text{και} \quad \mu(F \setminus E) = \mu(\emptyset) = 0.$$

- $\bar{\mu}(A) = \mu(E)$ για το παραπάνω $E\ (=A)$
$= \mu(A)$.

2 Η $\mathcal{A}_\mu$ είναι σ-άλγεβρα:

- $\emptyset \in \mathcal{A}_\mu$, αφού $\emptyset \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ (από 1).

- Έστω $A \in \mathcal{A}_\mu$. Τότε, $X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$:

$A \in \mathcal{A}_\mu \Rightarrow \exists\, E, F \in \mathcal{A}$ με $E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$.

Τότε: $\underbrace{X \setminus F}_{\in \mathcal{A}} \subseteq X \setminus A \subseteq \underbrace{X \setminus E}_{\in \mathcal{A}}$, και

$$\mu\big((X \setminus E) \setminus (X \setminus F)\big) = \mu\big((X \setminus E) \cap F\big) = \mu(F \setminus E) = 0.$$

Άρα, $X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$.

- Έστω $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_\mu$. ΘΔΟ $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}_\mu$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, E_n, F_n \in \mathcal{A}$ με

$$E_n \subseteq A_n \subseteq F_n \quad \text{και} \quad \mu(F_n \setminus E_n) = 0.$$

Τότε, $\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n}_{\in \mathcal{A}} \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n}_{\in \mathcal{A}}$,

και $\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)\right) =$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(F_n \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)\right)}_{\subseteq F_n \setminus E_n}\right)$$

μονοτονία $\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (F_n \setminus E_n)\right)$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\mu(F_n \setminus E_n)}_{=0} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$$

αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα

$$\Longrightarrow \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)\right) = 0.$$

Άρα, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}_\mu$.

3 i Το $\bar{\mu}$ είναι μέτρο (στην $\mathcal{A}_\mu$):

- $\bar{\mu}(\emptyset) \xlongequal[\bar{\mu} = \mu \text{ στην } \mathcal{A}]{\emptyset \in \mathcal{A},} \mu(\emptyset) = 0.$

- Έστω $A_n \in \mathcal{A}_\mu$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ξένα. ΘΔΟ:

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\mu}(A_n) \ :$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, E_n, F_n \in \mathcal{A}$: $E_n \subseteq A_n \subseteq F_n$, $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$.

Αφού τα A_n είναι ξένα, και $E_n \subseteq A_n$ $\forall n$,

τα E_n είναι <u>και αυτά ξένα</u>. Και:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \ ,$$

με $\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)\right) = 0$

(απόδειξη ακριβώς όπως στην προηγούμενη σελίδα).

Άρα, $\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \underset{\text{ορισμός}}{=\!=} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)$

αριθμ. προσθ. (τα E_n είναι ξένα)

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\mu(E_n)}_{= \bar{\mu}(A_n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\mu}(A_n).$$

(ii) <u>Το μέτρο $\bar{\mu}$ είναι πλήρες (στην $\mathcal{A}_\mu$):</u>

Έστω $N \in \mathcal{A}_\mu$ με $\bar{\mu}(N) = 0$. Τότε, κάθε

$A \subseteq N$ ανήκει επίσης στην $\mathcal{A}_\mu$;

$N \in \mathcal{A}_\mu \Rightarrow \exists\, E, F \in \mathcal{A}$: $E \subseteq N \subseteq F$

και $\mu(F \setminus E) = 0$.

Τότε, $\mu(E) = \mu(F) = \bar{\mu}(N) = 0$,

και $\emptyset \subseteq A \subseteq N \subseteq F$, δηλ.

$$\underbrace{\emptyset}_{\in \mathcal{A}} \subseteq A \subseteq \underbrace{F}_{\in \mathcal{A}} \quad \text{και} \quad \mu(F \setminus \emptyset) = \mu(F) = 0.$$

Άρα, $A \in \mathcal{A}_\mu$. (Φυσικά αυτόματα προκύπτει ότι $\bar{\mu}(A) = 0$ επίσης.)

(4) Έστω ότι το ν είναι και αυτό μέτρο στην $\mathcal{A}_\mu$ με $\nu_{|\mathcal{A}_\mu} = 0$. ΘΔΟ $\bar{\mu} = \nu$:

Έστω $A \in \mathcal{A}_\mu$. $\exists\, E, F \in \mathcal{A}$ με

$E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$.

Τότε, $\bar{\mu}(A) \underset{\text{ορ}}{=} \mu(E) = \mu(F)$ $\Rightarrow \nu(E) = \nu(F)$

$\mu(E) = \nu(E)$, $\mu(F) = \nu(F)$: $\mu = \nu$ στην $\mathcal{A}$.

Επίσης, $\underbrace{E \subseteq A \subseteq F}_{\in \mathcal{A}_\mu} \xrightarrow[\text{στην } \mathcal{A}_\mu]{\nu \text{ μέτρο}} \underbrace{\nu(E) \leq \nu(A) \leq \nu(F)}_{\text{ίσα}}$.

Άρα, $\nu(A) = \nu(E) = \mu(E) = \bar{\mu}(A)$.

5 ($\Leftarrow$) Αν $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}$, τότε $\bar{\mu} = \mu$.

Πράγματι, $\forall A \in \underset{\mathcal{A}}{\overset{}{\mathcal{A}_\mu}}$ έχουμε

$$\underbrace{A}_{\in \mathcal{A}} \subseteq A \subseteq \underbrace{A}_{\in \mathcal{A}} \quad \text{και} \quad \mu(A \setminus A) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Άρα, $\bar{\mu}(A) \underset{\text{ορ}}{=} \mu(A)$. (Ή απλά $\bar{\mu} = \bar{\mu}_{|\mathcal{A}_\mu} = \bar{\mu}_{|\mathcal{A}} \overset{\text{έχει δειχθεί}}{=} \mu$, αυτό να το δείχνουμε από την αρχή).

Οπότε, $(X, \mathcal{A}, \mu) = \underbrace{(X, \mathcal{A}_\mu, \bar{\mu})}_{\text{πλήρης}}$,

άρα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρης.

($\Rightarrow$) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρης.

Τότε, $\mathcal{A} \underset{\subseteq \checkmark}{=} \mathcal{A}_\mu$: Έστω $A \in \mathcal{A}_\mu$. Τότε,

$\exists$ $E, F \in \mathcal{A}$ με $E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$.

Άρα, $A = \underbrace{E}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(A \setminus E)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$, αφού $A \setminus E \subseteq \underbrace{F \setminus E}_{\in \mathcal{A}}$, $\mu(F \setminus E) = 0$ και $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρης.