Ασκήσεις (Κεφάλαια 1 & 2):

(1.4) Έστω $X \neq \emptyset$, $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του $X$. Ορίζουμε

$$\limsup A_n := \{x \in X : \text{το } x \text{ ανήκει σε άπειρα } A_n\},$$

$$\liminf A_n := \{x \in X : \text{το } x \text{ ανήκει σε όλα τα τελικά } A_n\}.$$

ΝΔΟ:

(i) $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$.

(ii) $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n$.

(iii) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

(iv) Αν $(A_n)_n \nearrow$, τότε $\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

(v) Αν $(A_n)_n \searrow$, τότε $\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Λύση: (i) Έστω $x \in X$. Τότε,

$$\begin{aligned} x \in \limsup A_n &\iff \forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \geq k \text{ ώστε } x \in A_n \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N},\ x \in \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \\ &\iff x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n\geq k}^{+\infty} A_n. \end{aligned}$$

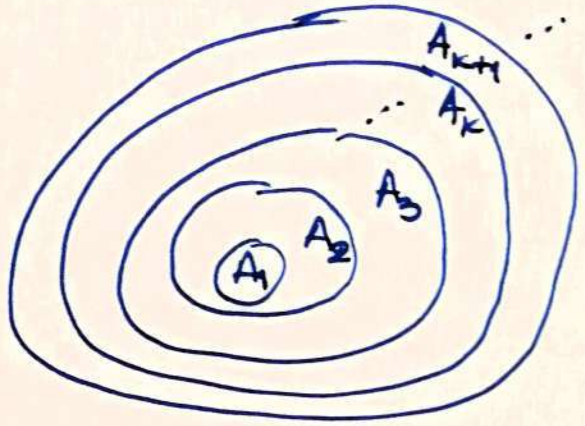
(ii) $x \in \liminf A_n \iff \exists\, k \in \mathbb{N}$ ώστε : $x \in A_n,\ \forall n \geq k$

$$\iff \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in \bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n$$

$$\iff x \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n.$$

(iii) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$, επειδή αν κάποιο $x$ ανήκει σε όλα τα τελικά $A_n$, τότε ανήκει σε άπειρα $A_n$.

(iv) Έστω $(A_n)_n \nearrow$.



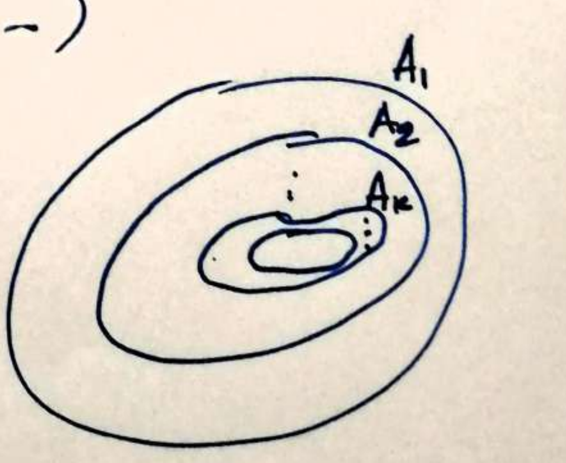

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n}_{= \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \ \forall k \in \mathbb{N}} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

(η ένωση δεν εξαρτάται από το $k$)

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n}_{= A_k} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

$A_k$ (το "μικρότερο" από τα $A_k, A_{k+1}, A_{k+2}, \dots$)

(v) Έστω $(A_n)_n \downarrow$.




$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n}_{= A_k} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

$A_k$ (το "μεγαλύτερο" από τα $A_k, A_{k+1}, \dots$)

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n}_{=\,\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n .$$

(δεν εξαρτάται από το σημείο "εκκίνησης" $k$, αφού $\bigcap_{n=1}^{k} A_n = A_k$)

∎

⚠ Αν $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε:

⊙ $$\limsup a_n = \overset{\inf}{\underset{k\to+\infty}{\lim}} \Big( \underbrace{\sup_{n\geq k} a_n}_{=\, b_k} \Big)$$

$b_k$, $\boxed{(b_k)\downarrow}$ (όσο μεγαλώνει το $k$, τα $a_n$ λιγοστεύουν).

Αντίστοιχα,

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n}_{=\, B_k}$$

$B_k$, $\boxed{(B_k)\downarrow}$ (όσο μεγαλώνει το $k$, τόσο μικραίνει η ένωση).

⊙ $$\liminf A_n = \overset{\sup}{\underset{k\to+\infty}{\lim}} \Big( \underbrace{\inf_{n\geq k} a_n}_{=\, b_k} \Big)$$

$b_k$, $\boxed{(b_k)\nearrow}$ (όσο μεγαλώνει το $k$, τα $a_n$ λιγοστεύουν)

Αντίστοιχα,

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n}_{=\, B_k}$$

$B_k$, $\boxed{(B_k)\nearrow}$ (όσο μεγαλώνει το $k$, τέμνουμε λιγότερα σύνολα).

(2.3) (Λήμμα Borel - Cantelli): Αν $\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n) < +\infty$,

τότε $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Τρόπος να το σκεφτόμαστε: Ας πούμε ότι για να συμβεί κάτι κακό (π.χ. πτώση αεροπλάνου), πρέπει να συμβούν συγχρόνως άπειρα από κάποια κακά ενδεχόμενα $A_n$, κάθε ένα από τα οποία έχει κατά κανόνα μικρή πιθανότητα να συμβεί ($\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n) < +\infty$). Τότε, είναι εντελώς απίθανο να συμβεί αυτό που φοβόμασταν (καθώς ανήκει στο $\limsup A_n$).

Λύση: $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\underbrace{\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right)}_{= B_k}$, όπου $(B_k)_k \downarrow$

Επίσης, $\mu(B_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \underset{\text{υποπροσθετικότητα}}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n) \underbrace{< +\infty}_{\text{από υπόθεση}}$.

Άρα, από συνέχεια των μέτρων,

$\mu(\limsup A_n) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{k\to+\infty}\mu(B_k)$.

Τώρα, $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k}^{+\infty}\mu(A_n)$

$0 \xrightarrow{k\to+\infty} 0$, και $\sum_{n=k}^{+\infty}\mu(A_n) \xrightarrow{k\to+\infty} 0$, ως "ουρά" της συγκλίνουσας σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n) < +\infty$.

Επομένως, $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu(B_k)=0$, δηλαδή

$$\mu(\limsup A_n)=0.$$

■

(1.7) Έστω $I_R := \{(a,b) : a<b,\ a,b\in\mathbb{Q}\}$.

ΝΔΟ $\sigma(I_R)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

<u>Λύση:</u> Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma(\Delta)$, όπου

$$\Delta := \{(a,b) : a<b \text{ στο } \mathbb{R}\}.$$

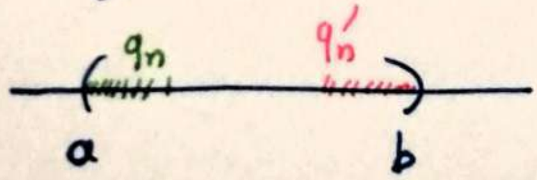
Άρα, θέλουμε: $\sigma(I_R)=\sigma(\Delta)$.

• $\sigma(I_R)\subseteq\sigma(\Delta)$, αφού $\boxed{I_R\subseteq\Delta\subseteq\underbrace{\sigma(\Delta)}_{\sigma\text{-άλγεβρα}}}$

$$\longrightarrow \sigma(I_R)\subseteq\sigma(\Delta).$$

• $\sigma(\Delta)\subseteq\sigma(I_R)$, αφού $\Delta\subseteq\underbrace{\sigma(I_R)}_{\sigma\text{-άλγεβρα}}$ $(\Rightarrow \sigma(\Delta)\subseteq\sigma(I_R))$.

Πράγματι, έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$, δηλ. έστω $(a,b)\in\Delta$.




• $\exists$ ακολουθία $(q_n)_n$ <u>ρητών</u> με $q_n \overset{\in(a,b)}{\cancel{\geq a}}$ $\forall n$ και $q_n\downarrow a$.

• $\exists$ ακολουθία $(q_n')_n$ <u>ρητών</u> με $q_n'\in(a,b)$ $\forall n$ και $q_n'\uparrow b$.

Τότε, $(a,b)=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\overbrace{(q_n,q_n')}^{\in I_R}\in\sigma(I_R)$.

■

**2.9** Έστω $(\mu_n)_n$ <u>αύξουσα</u> ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$ (δηλ., $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στον $X$,
$\mu_n : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ είναι μέτρο $\forall n \in \mathbb{N}$,
και $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ $\forall n \in \mathbb{N}$).

ΝΔΟ η συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$

με $\mu(A) := \overset{\sup_n}{\underset{n \to +\infty}{\lim}} \mu_n(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$

είναι μέτρο.

⚠ Το $\lim_{n \to +\infty} \mu_n(A)$ ορίζεται καλά $\forall A \in \mathcal{A}$: $(\mu_n(A))_{n=1}^{+\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία στο $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, άρα το $\lim_{n \to +\infty} \mu_n(A)$ υπάρχει (είναι το $\sup\{\mu_1(A), \mu_2(A), \mu_3(A), \dots\}$).

<u>Λύση:</u> • $\mu(\emptyset) = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\mu_n(\emptyset)}_{\substack{\| \\ 0, \text{ αφού } \mu_n \text{ μέτρο}}} = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$. ✓

• Έστω $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων της $\mathcal{A}$.

ΘΔΟ $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$:

$\boxed{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n):}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, το $\mu_k$ είναι <u>μέτρο</u>, άρα

$$(+) \quad \boxed{\mu_k\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_k(A_n)} \underset{\substack{\downarrow \\ \forall n, \ \mu(A_n) = \sup_{\ell}\{\mu_\ell(A_n)\} \geq \mu_k(A_n)}}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Το δεξί μέλος δεν εξαρτάται από το κ, άρα

$$\underbrace{\overset{\sup}{\lim_{k\to+\infty}}\ \mu_k\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)}_{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

⚠ Στην (†) θα θέλαμε να πάρουμε όρια και στα δύο μέλη όπως το $k \to +\infty$, και να πούμε:

$$\mu_k\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{\mu_k(A_n)}^{\xrightarrow{k\to+\infty} \mu(A_n) ✓} \quad \forall k$$

$$\downarrow k \to +\infty \qquad\qquad \boxed{\downarrow k \to +\infty \ ☆ \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \ ✗ \ \text{(όχι πάντα σωστό!)}}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \ \text{(σωστό)} ✓$$

Θέλει δουλειά!

και άρα να αποφανθούμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Το πρόβλημα είναι ότι η ☆ δεν ισχύει για γενικές ακολουθίες, και άρα θέλει δουλειά για να δειχθεί εδώ. Πράγματι, η ☆ θα σήμαινε ότι

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_k(A_n)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\lim_{k\to+\infty} \mu_k(A_n)\right],$$

δηλαδή ότι μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά δύο ορίων. Αυτό δεν ισχύει για γενικές ακολουθίες. Άρα, η ουσία της άσκησης είναι να δειχθεί η ☆ (παρότι με έμμεσο τρόπο, εν τέλει αυτό θα δειχθεί).

$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)}$ : Αρκεί ΝΔΟ :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)}_{\substack{\| \\ \lim\limits_{k\to+\infty} \mu_k(A_n)}} \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

~~Τώρα,~~

Τώρα, το παραπάνω άθροισμα είναι πεπερασμένο και ανεξάρτητο του $k$, άρα μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά του με το lim :

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{N} \lim_{k\to+\infty} \mu_k(A_n)$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} \mu_k(A_n)\right)}_{\substack{\| \\ \mu_k(A_1 \cup \ldots \cup A_N)}}$$

$\mu_k$ μέτρο, $A_i$ ξένα

μονοτονία μέτρων

Τώρα, $\forall k, \quad \mu_k(A_1 \cup \ldots \cup A_N) \leq \mu_k\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$

$$\leq \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)}_{\text{σταθερά ως προς } k.}$$

$\mu = \sup_k \mu_k$

Άρα, $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu_k(A_1 \cup \ldots \cup A_N) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$,

δηλαδή $\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \quad \forall N \in \mathbb{N}$. ∎

Μία εφαρμογή είναι η:

(2.5) Έστω $(\mu_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$.

Τότε, η $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ με

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

είναι μέτρο.

<u>Λύση:</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $\nu_n : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$

με $\nu_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k$.

Τότε, η $(\nu_n)_n$ είναι <u>αύξουσα</u> (τετριμμένο) ακολουθία <u>μέτρων</u> (δείξτε το: απλό) στον $(X, \mathcal{A})$, άρα το όριο $\lim_{n \to +\infty} \nu_n$

είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Όμως, $\lim_{n \to +\infty} \nu_n =$

$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k$. Άρα, το $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k$ είναι

μέτρο. ■

Εφαρμογή της (2.5) είναι η:

(2.8) Βρείτε ένα παράδειγμα ενός σ-πεπερασμένου μέτρου μ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, ώστε

$$\mu((a,b)) = +\infty \quad \forall a<b \text{ στο } \mathbb{R}.$$

<u>Λύση:</u> $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ορίζουμε

$$\mu(A) := \text{πλήθος των ρητών μέσα στο } A.$$

- Το $\mu$ είναι <u>μέτρο</u>, καθώς $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\delta_{q_n}}_{\text{μέτρο Dirac στο } q_n}$,

όπου $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ (και από την (2.5), το άθροισμα μέτρων είναι μέτρο).

- Επίσης, ο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ είναι σ-πεπερασμένος:

$$\mathbb{R} = \underbrace{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cup \{q_1\} \cup \{q_2\} \cup \{q_3\} \cup \cdots}_{\text{αριθμήσιμη ένωση}},$$

με $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 0 < +\infty$

και $\mu(\{q_n\}) = 1 < +\infty \quad \forall n$.

- Τέλος, $\mu((a,b)) = +\infty \quad \forall a < b$, καθώς κάθε τέτοιο $(a,b)$ περιέχει άπειρους ρητούς.

⚠ Η ιδέα εδώ ήταν ότι δώσαμε μέτρο <u>μηδέν</u> στο <u>τεράστιο</u> σύνολο $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(2.17) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < +\infty$.
Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(a) Το σύνολο τιμών του $\mu$ είναι άπειρο.

(β) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(A) < \varepsilon$
(δηλ., το $\mu$ παίρνει οσοδήποτε <u>μικρές</u> θετικές τιμές).

<u>Λύση:</u> (β) $\Rightarrow$ (a): Τετριμμένο: αν το σύνολο $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ ήταν πεπερασμένο, τότε λόγω του (β) θα υπήρχε $A_0 \in \mathcal{A}$ με $\mu(A_0)$ θετικό και ελάχιστο δυνατό. Όμως, πάλι λόγω του (β), $\exists\, A \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(A) \lneq \mu(A_0)$, άτοπο.

(a) $\Rightarrow$ (β): Έστω ότι <u>$\exists\, \varepsilon > 0$</u> ώστε
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(A) \geq \varepsilon \\ \text{ή } \mu(A) = 0 \end{array} \right\}, \forall A \in \mathcal{A}.$$
Θα καταλήξουμε σε <u>άτοπο</u>, φτιάχνοντας μία <u>φθίνουσα</u> ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ στην $\mathcal{A}$ με $\mu(A_n) \leq \frac{\mu(X)}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Λέμε ότι ένα μέτρο $\nu$ στον $(X, \mathcal{A})$ είναι <u>καλό</u> αν:

$$\begin{cases} \nu(X) < +\infty, \\ \text{το } \{\nu(A) : A \in \mathcal{A}\} \text{ είναι άπειρο} \\ \text{και } \begin{Bmatrix} \nu(A) \geq \varepsilon \\ \text{ή } \nu(A) = 0 \end{Bmatrix}, \forall A \in \mathcal{A} \end{cases}$$

(δηλ. το $\nu$ έχει τις ίδιες ιδιότητες με το δικό μας $\mu$).

<u>Βήμα 1:</u> Αν το $\nu$ είναι καλό, τότε

$\exists\, A \in \mathcal{A}$ με: $\quad \varepsilon \leq \nu(A) \leq \dfrac{\nu(X)}{2}$

και $\underbrace{\nu_A}$ καλό.

$\nu_A(B) := \nu(B \cap A)\ \forall B \in \mathcal{A}$ (μέτρο περιορισμένο στο $A$).

(Η απόδειξη αναβάλλεται για λίγο.)

<u>Βήμα 2:</u> Το $\mu$ είναι καλό

$\xrightarrow[\text{για το } \mu]{\text{Βήμα 1}}$ $\exists\, A_1 \in \mathcal{A}$ με $\quad \varepsilon \leq \mu(A_1) \leq \dfrac{\mu(X)}{2}$

και $\mu_{A_1}$ καλό

$\xrightarrow[\text{για το } \mu_{A_1}]{\text{Βήμα 1}}$ $\exists\, A_2 \in \mathcal{A}$ με $\quad \varepsilon \leq \mu_{A_1}(A_2) \leq \dfrac{\mu_{A_1}(X)}{2}$

$$\text{και} \quad \underbrace{(\mu_{A_1})_{A_2}}_{\mu_{A_1 \cap A_2}} \quad \text{καλό},$$

Δηλ.

$$\varepsilon \leq \mu(A_1 \cap A_2) \leq \frac{\mu(A_1)}{2} \leq \frac{\mu(X)}{2^2}$$

και $\mu_{A_1 \cap A_2}$ καλό

$\xrightarrow[\text{για το } \mu_{A_1 \cap A_2}]{\text{Βήμα 1}}$ $\exists\ A_3 \in \mathcal{A}$ με $\varepsilon \leq \mu_{A_1 \cap A_2}(A_3) \leq \dfrac{\mu_{A_1 \cap A_2}(X)}{2}$

και $(\mu_{A_1 \cap A_2})_{A_3}$ καλό.

Δηλ

$$\varepsilon \leq \mu\ (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \leq \frac{\mu(A_1 \cap A_2)}{2} \leq \frac{\mu(X)}{2^3}$$

και $\mu_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}$ καλό,

κ.ο.κ.

Παρατηρούμε ότι η $(B_k)_{k=1}^{+\infty}$, με $B_k := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, είναι <u>φθίνουσα</u> ακολουθία στην $\mathcal{A}$, με $\underset{>0}{\varepsilon} \leq \mu(B_k) \leq \dfrac{\mu(X)}{2^k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο (καθώς $\mu(B_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$).

Μένει να δείξουμε το Βήμα 1: Έστω $\nu$ καλό.

Παρατήρηση 1: Δεν μπορούμε να βρούμε πάνω από $\frac{\nu(X)}{\varepsilon}$ ξένα σύνολα στην $\mathcal{A}$ με θετικό μέτρο $\nu$.

Πράγματι, έστω $A_1, \dots, A_K \in \mathcal{A}$ ξένα, με $\nu(A_i) \gneq 0$ $\forall i$ και $K > \frac{1}{\varepsilon}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \Big\Downarrow \nu \text{ καλό} \\ \nu(A_i) \geq \varepsilon \quad \forall i \end{array}}$$

Άρα, $\nu(A_1 \cup \dots \cup A_K) = \underbrace{\nu(A_1)}_{\geq \varepsilon} + \dots + \underbrace{\nu(A_K)}_{\geq \varepsilon} \geq K \cdot \varepsilon > \frac{\nu(X)}{\varepsilon} \varepsilon = \nu(X)$,

άτοπο, αφού $A_1 \cup \dots \cup A_K \subseteq X$ ($\Longrightarrow \nu(A_1 \cup \dots \cup A_K) \leq \nu(X)$). ∎

Παρατήρηση 2: Αν $A_1, A_2, \dots, A_K$ είναι ξένα σύνολα στην $\mathcal{A}$, τότε κάποιο από τα $\{\nu_{A_n}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι άπειρο (αφού το $\{\nu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι άπειρο). ∎

<u>Παρατήρηση 3:</u> $\forall B \in \mathcal{A}$ με $\{v_B(A) : A \in \mathcal{A}\}$ άπειρο,

υπάρχει $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$ με

$$0 \lneq v(A) \leq \frac{v(B)}{2}.$$

$$\left(\begin{array}{c} \Downarrow \\ \varepsilon \leq v(A) \end{array}\right)$$

Πράγματι, $\exists\ E \in \mathcal{A}$, $E \subseteq B$ με

$$0 \lneq v(E) \lneq v(B) \quad \left(\Rightarrow 0 \lneq v(B \setminus E) \lneq v(B)\right)$$

(αλλιώς το $\{v_B(A) : A \in \mathcal{A}\}$ θα περιεχόταν στο $\{0, v(B)\}$, άτοπο).

Και αφού τα $E$, $B \setminus E$ δεν μπορούν να έχουν συγχρόνως μέτρο $v \ngtr \frac{v(B)}{2}$,

κάποιο από αυτά έχει μέτρο $\leq \frac{v(B)}{2}$.

Αυτό παίζει το ρόλο του $A$. ■

Τώρα, θέλουμε ΝΔΟ $\exists\ A \in \mathcal{A}$ με

$$0 \lneq v(A) \leq \frac{v(X)}{2}$$

$$\left(\begin{array}{c} \Downarrow \\ \varepsilon \leq v(A) \end{array}\right)$$

και $\{v_A(B) : B \in \mathcal{A}\}$ άπειρο.

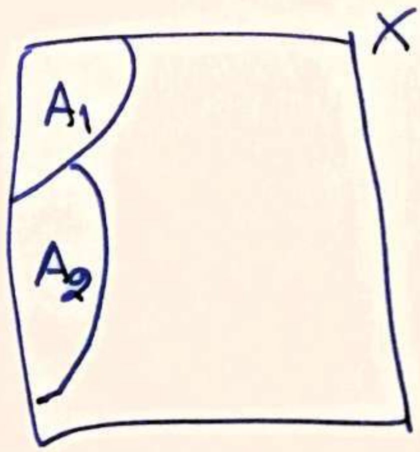
Έστω ότι $\forall A \in \mathcal{A}$ με $0 \lneq v(A) \leq \frac{v(X)}{2}$

(τέτοια $A$ υπάρχουν από Παρ. 3), έχουμε ότι το $\{ \nu_A(B) : B \in \mathcal{A} \}$ είναι πεπερασμένο. Θα οδηγηθούμε σε άτοπο ως εξής:

- $\exists\, A_1 \in \mathcal{A}$ με $\varepsilon \leq \nu(A_1) \leq \dfrac{\nu(X)}{2}$ (Παρ. 3).

Αφού $\{ \nu_{A_1}(B) : B \in \mathcal{A} \}$ είναι πεπερασμένο,

το $\{ \nu_{X \setminus A_1}(B) : B \in \mathcal{A} \}$ είναι άπειρο (Παρ. 2).




Άρα, $\exists\, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_2 \subseteq X \setminus A_1$

με

$$\varepsilon \leq \nu(A_2) \leq \frac{\nu(X \setminus A_1)}{2} \leq \frac{\nu(X)}{2}$$

(Παρ. 3 για $\nu_{X \setminus A_1}$).

Τα $\{ \nu_{A_1}(B) : B \in \mathcal{A} \}$, $\{ \nu_{A_2}(B) : B \in \mathcal{A} \}$ είναι πεπ.

$\xrightarrow{\text{Παρ. 2}}$ το $\{ \nu_{X \setminus (A_1 \cup A_2)}(B) : B \in \mathcal{A} \}$ είναι άπειρο

$\xrightarrow{\text{Παρ. 3}}$ $\exists\, A_3 \in \mathcal{A}$, $A_3 \subseteq X \setminus (A_1 \cup A_2)$, με

$$\varepsilon \leq \nu(A_3) \leq \frac{\nu(X \setminus (A_1 \cup A_2))}{2} \leq \frac{\nu(X)}{2},$$

κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον και παράγει ξένα $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$

με $\nu(A_i) \geq \varepsilon \quad \forall i$.

Αυτό είναι αδύνατον από την Παρατήρηση 1.

Άρα, $\exists A \in \mathcal{A}$ με $0 \lneq \nu(A) \leq \dfrac{\nu(X)}{2}$

και $\{\nu_A(B) : B \in \mathcal{A}\}$ άπειρο.

■