Μηχανισμός κατασκευής μέτρων

(περιλαμβανομένου του μέτρου Lebesgue).

Η ιδέα είναι η εξής:

① Ξεκινάμε με ένα "εξωτερικό μέτρο" $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$, που έχει κάποιες καλές ιδιότητες, αλλά δεν είναι πάντα μέτρο σε όλο το $\mathcal{P}(X)$ (του λείπει ίσως η αριθμήσιμη προσθετικότητα).

② Θέλουμε να περιορίσουμε το ϕ σε μία μεγάλη (ή έστω μη τετριμμένη) σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_\phi \subseteq \mathcal{P}(X)$, ώστε το $\phi_{|\mathcal{M}_\phi}$ να είναι μέτρο.

Θα δούμε ότι αυτά γίνονται:

Ⓐ Είναι πολύ εύκολο να κατασκευάσουμε εξωτερικά μέτρα $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$.

Καραθεοδωρή:

Ⓑ $\forall$ εξωτερικό μέτρο $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$, $\exists$ σ-άλγεβρα (εν γένει μεγάλη!) $\mathcal{M}_\phi \subseteq \mathcal{P}(X)$ ώστε $\phi_{|\mathcal{M}_\phi}$ να είναι μέτρο.

Με αυτό τον τρόπο θα κατασκευάσουμε και το μέτρο Lebesgue (μήκος) στη Lebesgue σ-άλγεβρα ($\subseteq \mathcal{P}(X)$ που θα περιέχει τη Borel σ-άλγεβρα):

Πρώτα θα κατασκευάσουμε ένα εξωτερικό μέτρο $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$

("μήκος" που δε θα υπακούει την αριθμήσιμη προσθετικότητα),

και μετά θα περιορίσουμε το λ^* στη $\underbrace{\mathcal{M}_{\lambda^*}}_{\text{Lebesgue σ-άλγεβρα}} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Εκεί το λ^*

θα είναι μέτρο (και θα το λέμε μέτρο Lebesgue),

δηλ. θα υπακούει την αριθμήσιμη προσθετικότητα.

→ Εξωτερικά μέτρα:

→ Ορισμός: Μια $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ λέγεται εξωτερικό μέτρο αν:

(α) $\phi(\emptyset) = 0$,

(β) $\forall\ A \subseteq B \subseteq X$, έχουμε $\phi(A) \leq \phi(B)$,
(μονοτονία)

(γ) $\forall\ (A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του X,
έχουμε: $\phi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(A_n)$.
(αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα).

$\emptyset$
$\forall$

! → Τρόπος κατασκευής $\boxed{\text{εξωτερικών}}$ μέτρων σε κάθε X:

→ Ορισμός: Έστω $X \neq \emptyset$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Η $\mathcal{C}$ είναι σ-κάλυψη του X αν:

$\emptyset \in \mathcal{C}$ και $\exists\ C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{C}$ ώστε
$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n .$$

(⚠ Χρησιμοποιώντας το $\emptyset \in \mathcal{C}$, η παραπάνω ένωση επιτρέπεται να είναι και πεπερασμένη.)

Π.χ.: Η $\mathcal{C} = \{(a,b) : a \leq b \text{ στο } \mathbb{R}\}$

είναι σ-κάλυψη του $\mathbb{R}$

$$\Big(\phi \underset{\text{ορ}}{=} (a,a) \in \mathcal{C} \ , \ \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-n,n)}_{\in \mathcal{C}} \Big).$$

→ Πρόταση: Έστω $X \neq \phi$ και $\mathcal{C}$ μια σ-κάλυψη του X. Έστω $\tau : \mathcal{C} \longrightarrow [0,+\infty]$ με $\tau(\phi) = 0$.

Τότε, η $\phi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ με

$$\phi(A) := \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(C_n) \ : \ \underbrace{A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n}_{\substack{\text{επιτρέπονται} \\ \text{και οι πεπερασμένες} \\ \text{καλύψεις!}}} , \ C_n \in \mathcal{C} \ \forall n \in \mathbb{N} \Big\}$$

είναι εξωτερικό μέτρο.

⚠ Από τον ορισμό, $\phi(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(C_n)$, $\forall (C_n)_{n=1}^{+\infty}$ στη $\mathcal{C}$ με $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$.

Απόδειξη: (α) $\phi(\phi) = 0$: $\phi \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\phi}_{\in \mathcal{C}}$

$$\xRightarrow[\text{inf}]{\text{ορισμός}} \phi(\phi) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\tau(\phi)}_{= 0} = 0.$$

Αφού το σύνολο τιμών της ϕ είναι στο $[0,+\infty]$, $\phi(\phi) \geq 0$

$\Rightarrow \phi(\phi) = 0.$

(β) Έστω $A \subseteq B \subseteq X$. Τότε $\phi(A) \leq \phi(B)$:

$\forall \ (C_n)_{n=1}^{+\infty}$ στην $\mathcal{C}$ με $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$,

έχουμε και ότι $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$

$$\overset{\text{ορισμός}}{\underset{\inf}{\Longrightarrow}} \phi(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(C_n),$$

$\forall \ (C_n)_n$ στη $\mathcal{C}$ με $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$

$$\underset{\substack{\inf \\ \text{δεξιά} \\ = \phi(B)}}{\longrightarrow} \phi(A) \leq \phi(B).$$

(γ) Έστω $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία στο $\mathcal{P}(X)$.

ΘΔΟ $\phi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(A_n)$.

- Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \phi(A_n)$: OK.
- Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \phi(A_n) < +\infty$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi(A_n) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \tau(C_k^{A_n}) : A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k^{A_n}, \; C_k^{A_n} \in \mathcal{C} \; \forall k \in \mathbb{N} \right\}$.

Από ιδιότητες του inf, ξέρουμε ότι το $\phi(A_n)$ προσεγγίζεται όσο καλά θέλουμε από τα στοιχεία του συνόλου δεξιά. Άρα, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \left(C_k^{A_n}\right)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία στη $\mathcal{C}$, με $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k^{A_n}$ και

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tau(C_k^{A_n}) - \frac{\varepsilon}{2^n} \underset{(*)}{\leq} \overbrace{\phi(A_n)}^{\in \mathbb{R}} \underbrace{\left(\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \tau(C_k^{A_n}) \right)}_{\text{τετριμμένο}}$$

χρήσιμο!

(δηλ. $\phi(A_n)$ "=" $\sum_{k=1}^{+\infty} \tau(C_k^{A_n})$)

Τότε, έχουμε την εξής αριθμήσιμη κάλυψη του $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ με στοιχεία της $\mathcal{C}$:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \underbrace{C_k^{A_n}}_{\in \mathcal{C}}$$

$$\xrightarrow[\text{ορισμός } \phi \text{ μέσω inf}]{} \phi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{\substack{(n,k) \\ \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}} \tau(C_k^{A_n})$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \tau(C_k^{A_n}) \right]}^{\text{“=” } \phi(A_n)}$$

δείξτε το (απλό - ισχύει και ως ισότητα!)

$$\overset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\phi(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(A_n) + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}}_{\varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon} = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(A_n) + \varepsilon .$$

■

→ <u>Σημαντικό παράδειγμα:</u> (εφαρμογή) Το $\boxed{\text{εξωτερικό}}$ μέτρο $\boxed{\text{Lebesgue}}$ στο $\mathbb{R}$:

→ Παίρνουμε $\mathcal{C} := \{ (a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \}$,
που είναι σ-κάλυψη του $\mathbb{R}$.

→ Ορίζουμε $\tau : \mathcal{C} \to [0,+\infty]$ με

$$\tau\big((a,b)\big) := b - a .$$ (τότε $\tau(\emptyset) = \tau((a,a)) = a - a = 0$ ✓).

→ Από την πρόταση, η συνάρτηση $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ με

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(b_n - a_n)}_{\tau((a_n,b_n))} : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a_n, b_n), \ a_n \leq b_n \text{ στο } \mathbb{R} \right\}$$

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$,

είναι εξωτερικό μέτρο. Ονομάζουμε την λ^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$.

⚠ Εκκρεμότητα: ΘΔΟ

$$\lambda^*((a,b)) = \lambda^*([a,b]) = \lambda^*([a,b)) = \lambda^*((a,b]) = b-a$$

$\forall a \leq b$ στο $\mathbb{R}$.

Αυτό θα συνεπάγεται ότι το λ^* θα ήταν μία λογική "προσέγγιση" της έννοιας του μήκους $\forall A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Ξέρουμε όμως ότι αριθμήσιμα προσθετικό μήκος δεν υπάρχει σε όλο το $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Πράγματι, το λ^* δεν είναι αριθμήσιμα προσθετικό (και άρα δεν είναι μέτρο). Η απόδειξη είναι ουσιαστικά αυτή που είδαμε ήδη (με το σύνολο Vitali).

Όμως, ο περιορισμός του λ^* σε μια κατάλληλη (και μεγάλη) σ-άλγεβρα είναι μέτρο (και άρα κατάλληλη έννοια μήκους σε αυτή τη σ-άλγεβρα)

→ Ο περιορισμός εξωτ. μέτρου σε (μη τετριμμένο) μέτρο

Αυτό γενικεύεται για κάθε εξωτερικό μέτρο

$\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$, μέσω αποτελεσμάτων του

Καραθεοδωρή :