→ Πίσω στο <u>εξωτερικό μέτρο Lebesgue</u>:

Έχουμε ορίσει $\lambda^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ με

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n,b_n),\ \underset{(\text{στο } \mathbb{R})}{a_n \le b_n} \right\}$$

(⚠ Άρα, $\lambda^*(A) \le$ από κάθε μία από αυτές τις ποσότητες)

Έχουμε δείξει ότι το λ^* είναι εξωτερικό μέτρο, και το έχουμε ονομάσει <u>το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$</u>.

Λόγω του ορισμού του, νιώθουμε ότι το λ^* είναι καλή προσέγγιση του μήκους (Ευκλείδειου) κάθε συνόλου A.

Αυτό ισχύει σίγουρα για τα A που είναι διαστήματα:

<u>Πρόταση</u>: (i) $\lambda^*(\{x_0\}) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lambda^*((a,b)) = \lambda^*([a,b]) = \lambda^*((a,b]) = \lambda^*([a,b)) =$

$= b-a, \quad \forall\, a<b$ στο $\mathbb{R}$.

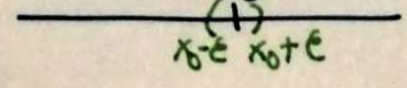
(iii) $\lambda^*((a,+\infty)) = \lambda^*([a,+\infty)) = \lambda^*((-\infty,a]) =$

$= \lambda^*((-\infty,a]) = \lambda^*(\mathbb{R}) = +\infty,$

$\forall\, a \in \mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u>: (i) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\{x_0\} \subseteq \underbrace{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)}_{\text{αριθμήσιμη κάλυψη}}$$



$\Rightarrow \lambda^*(\{x_0\}) \leq \left((x_0+\varepsilon)-(x_0-\varepsilon)\right) = 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0$

$\Rightarrow \lambda^*(\{x_0\}) \leq 0.$

Επίσης, $\lambda^*(\{x_0\}) \geq 0$ (λ^* εξωτ. μέτρο $\Rightarrow$ παίρνει τιμές στο $[0,+\infty]$).

Άρα, $\lambda^*(\{x_0\}) = 0.$

(ii) Θα δείξουμε το (ii) πρώτα για <u>κλειστά</u> διαστήματα. Τα υπόλοιπα θα προκύψουν εύκολα.

Έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$. ΘΔΟ $\lambda^*([a,b]) = b-a$.

- $\forall \varepsilon>0$, $[a,b] \subseteq (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$

  $\Rightarrow \lambda^*([a,b]) \leq \left((b+\varepsilon)-(a-\varepsilon)\right) = b-a+2\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0$

  $\Rightarrow \boxed{\lambda^*([a,b]) \leq b-a.}$

- ΘΔΟ $\boxed{\lambda^*([a,b]) \geq b-a}$. Το $\lambda^*([a,b])$ είναι το infimum κάποιων ποσοτήτων. Άρα, αρκεί ΝΔΟ το $b-a$ είναι κάτω φράγμα για αυτές τις ποσότητες. Τότε αυτόματα θα προκύψει ότι το infimum (<u>μέγιστο</u> κάτω φράγμα) είναι $\geq$ του κάτω φράγματος $b-a$.

Άρα, ΘΔΟ για κάθε κάλυψη

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a_n, b_n), \quad \text{με } a_n \le b_n \text{ στο } \mathbb{R},$$

έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n) \ge b-a.$$

Πράγματι, έστω μία τέτοια κάλυψη $[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a_n, b_n)$.

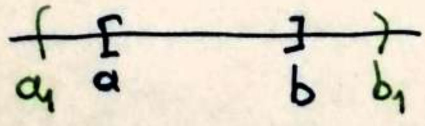
Αφού το $[a,b]$ είναι <u>συμπαγές</u>, καλύπτεται από <u>πεπερασμένα</u> από τα (a_n, b_n)! Άρα, αρκεί ΝΔΟ:

(*) Όποτε $[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} (a_n, b_n)$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{m} (b_n - a_n) \ge b-a.$$

Το δείχνουμε με επαγωγή στο m:

- <u>Για $m=1$:</u> Έστω $[a,b] \subseteq (a_1, b_1)$. Τότε



$$a_1 < a \le b < b_1 \Rightarrow b-a \le b_1 - a_1,$$

άρα η (*) ισχύει.

- Έστω ότι η (*) ισχύει για $m=k$.
- ΘΔΟ η (*) ισχύει για $m=k+1$:

Έστω ότι $[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{k+1} (a_n,b_n)$.

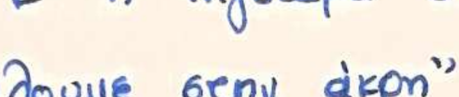
ΘΔΟ $\sum_{n=1}^{k} (b_n-a_n) \geq b-a$.

Από επαγωγική υπόθεση, ξέρουμε τι γίνεται για καλύψεις από k ή λιγότερα σύνολα. Οπότε θα πρέπει να "βάλουμε στην άκρη" κάποιο από τα (a_n,b_n):

Το $a \in \bigcup_{n=1}^{k+1} (a_n,b_n) \Rightarrow$ το a ανήκει σε κάποιο από τα (a_n,b_n), έστω στο (a_1,b_1).

Άρα, $a_1 < a$.

Περίπτωση 1:

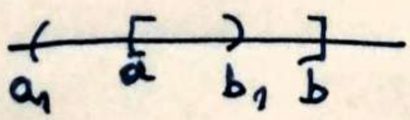


$\boxed{b_1 > b.}$

Τότε, $[a,b] \subseteq (a_1,b_1) \Rightarrow b_1-a_1 \geq b-a$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{k+1} (b_n-a_n) \geq b-a$ ✓

Περίπτωση 2:



$\boxed{a < b_1 < b.}$

Τότε, κανένα σημείο του $[b_1,b]$ δεν καλύπτεται από το $(a_1,b_1) \Rightarrow [b_1,b] \subseteq \bigcup_{n=2}^{k+1} (a_n,b_n)$, δηλ. το $[b_1, b]$ καλύπτεται από $\underline{\underline{\kappa}}$ ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα. Από επαγωγική υπόθεση,

$$\sum_{n=2}^{\kappa+1} (b_n - a_n) \geq b - b_1$$

$$\Longrightarrow (b_1 - a_1) + \sum_{n=2}^{\kappa+1} (b_n - a_n) \geq (\cancel{b_1} - a_1) + (b - \cancel{b_1})$$

$$= b - a_1 > b - a. \quad \checkmark$$

■

Τώρα:

⊙ $\boxed{\lambda^*((a,b)) = b-a,}$ επειδή:

$$\underbrace{(a,b) \subseteq (a,b)}_{\substack{\text{αριθμ.} \\ \text{κάλυψη}}} \Longrightarrow \lambda^*((a,b)) \leq b-a,$$

και $\lambda^*((a,b)) \geq b-a$, επειδή $\forall \varepsilon > 0$ αρκετά μικρό,

$$(a,b) \supseteq [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$$

$$\Longrightarrow \lambda^*((a,b)) \geq$$

λ* εξωτ. μέτρο, άρα μονότονο

$$\geq \lambda^*([a+\varepsilon, b-\varepsilon])$$

$$= (b-\varepsilon) - (a+\varepsilon)$$

$$= b - a - 2\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \lambda^*((a,b)) \geq b-a.$$

■

⊙ $\boxed{\lambda^*([a,b)) = b-a,}$ επειδή:

$$(a,b) \subseteq [a,b) \subseteq [a,b] \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^*((a,b)) \le \lambda^*([a,b)) \le \lambda^*([a,b])$$
$$\lambda^*((a,b)) = b-a, \quad \lambda^*([a,b]) = b-a$$

$$\Rightarrow \lambda^*([a,b)) = b-a.$$

⊙ $\boxed{\lambda^*((a,b]) = b-a}$: παρόμοια απόδειξη.

(iii) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $\lambda^*((-\infty,a)) = +\infty$:

$$(-\infty,a) \supseteq (-n,a) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lambda^*((-\infty,a)) \geq \lambda^*((-n,a)) = a+n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$a+n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

Άρα, $\lambda^*((-\infty,a)) = +\infty$.

Τα υπόλοιπα προκύπτουν παρόμοια. ∎

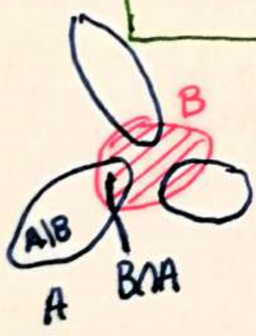
Τώρα θα δούμε ότι για κάθε εξωτερικό μέτρο $\phi: \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ υπάρχει μία σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_\phi \subseteq \mathcal{P}(X)$ (μη τετριμμένη εν γένει), ώστε το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ να είναι μέτρο.

⚠ Αυτό θα σημαίνει ότι και το εξωτερικό μέτρο Lebesgue, που σίγουρα δεν είναι αριθμήσιμα προσθετικό στο $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, είναι μέτρο (και άρα αριθμήσιμα προσθετικό) σε μία μεγάλη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_{\lambda^*} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. [Αυτή θα την ονομάσουμε <u>Lebesgue σ-άλγεβρα</u>, και θα δούμε ότι <u>περιέχει τη Borel</u>.] ■

→ <u>Ορισμός</u> (κριτήριο του Καραθεοδωρή): Έστω $X \neq \emptyset$ και έστω $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ εξωτερικό μέτρο.

Ένα $B \subseteq X$ λέγεται <u>ϕ-μετρήσιμο</u> αν ικανοποιεί το εξής κριτήριο:

$$\boxed{\forall A \subseteq X, \quad \phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(\underbrace{A \cap B^c}_{= A \setminus B})} \quad (*)$$



το B "κόβει καλά" κάθε άλλο $A \subseteq X$.

→ <u>Θεώρημα</u> (Καραθεοδωρή): Έστω $X \neq \emptyset$ και έστω $\phi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ εξωτερικό μέτρο. Η οικογένεια

$$\mathcal{M}_\phi := \{ B \subseteq X : B \ \phi\text{-μετρήσιμο} \}$$

είναι <u>σ-άλγεβρα</u>, και το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι <u>πλήρες</u>

<u>μέτρο</u>.

<u>Παρατηρήσεις</u>:

(1) Για ΝΔΟ ισχύει η (*) για κάποιο $B \subseteq X$,

<u>αρκεί</u> ΝΔΟ

$$\boxed{\phi(A) \geq \phi(A \cap B) + \phi(A \setminus B) \quad \forall A \subseteq X}$$

[καθώς <u>πάντα</u>

$$\phi(A) \leq \phi(A \cap B) + \phi(A \setminus B),$$

λόγω υποπροσθετικότητας του εξωτερικού μέτρου

ϕ $\quad (A = (A \cap B) \cup (A \setminus B))$].

(2) $\boxed{\text{Αν } B \subseteq X \text{ και } \phi(B) = 0, \text{ τότε } B \in \mathcal{M}_\phi :}$

$\forall A \subseteq X$,

$$\underbrace{\phi(A \cap B)}_{\substack{\| \\ 0,}} + \underbrace{\phi(A \setminus B)}_{\leq \phi(A),} \leq \phi(A).$$

αφού $A \setminus B \subseteq A$

αφού $A \cap B \subseteq B$

$\Rightarrow 0 \leq \phi(A \cap B) \leq \phi(B) = 0$

Αυτό θα μας βοηθήσει για να δείξουμε στο τέλος ότι το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι <u>πλήρες</u>.

Απόδειξη: Ουσιαστικά θα δείξουμε παράλληλα ότι η $\mathcal{M}_\phi$ είναι σ-άλγεβρα και ότι το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι μέτρο.

• $\boxed{\phi(\emptyset)=0} \xRightarrow{\text{Παρ. 2}} \boxed{\emptyset \in \mathcal{M}_\phi.}$

• $\boxed{\text{Έστω } B\in\mathcal{M}_\phi. \text{ Τότε, } X\setminus B\in\mathcal{M}_\phi:}$

$$\forall A\subseteq X,\quad \phi(A\cap(X\setminus B)) + \phi\big(A\cap \underbrace{(X\setminus B)^c}_{=B}\big)$$

$$= \phi(A\setminus B) + \phi(A\cap B) \underset{\substack{\text{το } B \text{ είναι}\\ \phi\text{-μετρήσιμο}}}{=} \phi(A).$$

• $\boxed{\text{Η } \mathcal{M}_\phi \text{ είναι άλγεβρα:}}$ $\forall B_1, B_2\in\mathcal{M}_\phi$, έχουμε: $B_1\cap B_2\in\mathcal{M}_\phi$.

Πράγματι, $\forall A\subseteq X$:

$$\phi(A) \underset{B_1\in\mathcal{M}_\phi}{=\!=} \underline{\phi(A\cap B_1)} + \phi(A\setminus B_1)$$

$$\underset{\substack{B_2\in\mathcal{M}_\phi\\ \Rightarrow \text{κόβει καλά}\\ \text{το } A\cap B_1}}{=\!=} \underline{\phi(A\cap B_1\cap B_2) + \overbrace{\phi((A\cap B_1)\setminus B_2)}} \overbrace{+\phi(A\setminus B_1)}^{\geq \phi(A\setminus(B_1\cap B_2))}$$

$[(A\cap B_1)\setminus B_2] \cup [A\setminus B_1] = A\setminus(B_1\cap B_2)$, και το ϕ είναι υποπροσθετικό.

$$\geq \phi(A\cap(B_1\cap B_2)) + \phi(A\setminus(B_1\cap B_2))$$

• Για ΝΔΟ η $\mathcal{M}_\phi$ είναι σ-άλγεβρα, δεδομένου ότι ξέρουμε ότι είναι άλγεβρα, αρκεί ΝΔΟ η $\mathcal{M}_\phi$ είναι κλειστή ως προς ξένες αριθμήσιμες ενώσεις.

Και για ΝΔΟ το ϕ είναι μέτρο, θα απομένει ΝΔΟ:

$\forall\, (B_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στη $\mathcal{M}_\phi$, έχουμε:

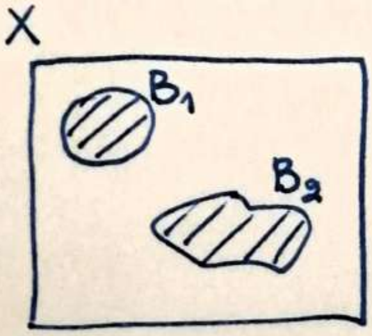
$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(B_n)$$

($\leq$: προφανές από υποπροσθετικότητα)

Τα δείχνουμε παράλληλα, ξεκινώντας με <u>πεπερασμένες</u> ξένες ενώσεις.

<u>Βήμα 1:</u> Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\phi$ ξένα, τότε:

$$\boxed{\forall A \subseteq X,\ \phi(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \phi(A \cap B_1) + \phi(A \cap B_2)}$$



$$\forall A \subseteq X,\ \phi(A \cap (B_1 \cup B_2)) \overset{B_1 \in \mathcal{M}_\phi}{=}$$

$$= \phi(A \cap \underbrace{(B_1 \cup B_2) \cap B_1}_{= B_1}) + \phi(A \cap \underbrace{(B_1 \cup B_2) \cap B_1^c}_{= B_2})$$

$$= \phi(A \cap B_1) + \phi(A \cap B_2).$$

<u>Βήμα 2:</u> Επαγωγικά: Αν $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{M}_\phi$ ξένα, τότε:

(*1) $$\boxed{\forall A \subseteq X,\ \phi(A \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_n)) = \phi(A \cap B_1) + \ldots + \phi(A \cap B_n).}$$

⚠ Η (*1) σημαίνει ότι: $\forall (B_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολ. ξένων συνόλων στη $\mathcal{M}_\phi$, έχουμε:

(*2) $$\boxed{\forall A \subseteq X, \quad \phi\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(A \cap B_n)}$$. Πράγματι:

- $\forall A \subseteq X, \quad A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap B_n)$

$$\xrightarrow{} \phi\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(A \cap B_n)$$

υποπροσθ.

- $\forall A \subseteq X$: $\forall N \in \mathbb{N}$, τα $B_1, \dots, B_N \in \mathcal{M}_\phi$ είναι ξένα

$$\longrightarrow \phi\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)\right) \underset{\text{μονοτονία}}{\geq} \phi\left(A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_N)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \phi(A \cap B_n) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$$\xrightarrow{N \to +\infty} \phi\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)\right) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(A \cap B_n).$$

⚠ Θέτοντας στην (*2) $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$, έχουμε:

(*3) $$\boxed{\phi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(B_n) \quad \forall\ B_1, B_2, \dots \in \mathcal{M}_\phi \text{ ξένα.}}$$

Άρα, μόλις δείξουμε ότι και η $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{M}_\phi$, η (*3) δείχνει ότι το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι <u>μέτρο</u>.

<u>Βήμα 3</u>: **Η άλγεβρα $\mathcal{M}_\phi$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ξένες ενώσεις ($\longrightarrow$ η $\mathcal{M}_\phi$ είναι σ-άλγεβρα).**

Πράγματι, έστω $(B_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στη $\mathcal{M}_\phi$. <u>Στόχος</u>: $\forall A \subseteq X$,

$$\phi(A) \geqslant \phi\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\Big)\Big) + \phi\Big(A \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\Big)\Big).$$

Έστω $A \subseteq X$. $\forall N \in \mathbb{N}$, τα $B_1, B_2, \dots, B_N$, $\underbrace{X \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_N)}_{\in \text{ στην άλγεβρα } \mathcal{M}_\phi}$ είναι ξένα στη $\mathcal{M}_\phi$. Άρα,

$$\phi(A) = \phi(A \cap \underset{B_1 \cup \dots \cup B_N \cup (X \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_N))}{\overset{\|}{X}}) \underset{=}{\overset{(*_1)}{=}}$$

X.

$$= \phi(A \cap B_1) + \dots + \phi(A \cap B_N) + \phi\Big[\underbrace{A \cap (X \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_N))}_{\substack{\| \\ A \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_N) \\ \supseteq \\ A \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n}}\Big]$$

μονοτονία

$$\geqslant \phi(A \cap B_1) + \dots + \phi(A \cap B_N) + \underbrace{\phi\Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\Big)}_{\text{σταθερά ως προς } N}, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$$\overset{N \to +\infty}{\Longrightarrow} \phi(A) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(A \cap B_n) + \phi\Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\Big) =$$

$$\underset{(*_2)}{=} \phi\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)\right)+\phi\left(A\setminus\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n\right)\right).$$

Άρα, η $\bigcup_{n=1}^{+\infty}B_n \in \mathcal{M}_\phi$.

Άρα, η $\mathcal{M}_\phi$ είναι σ-άλγεβρα και το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι μέτρο.

Απομένει ΝΔΟ το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι <u>πλήρες</u> μέτρο. Πράγματι:

Έστω $N \in \mathcal{M}_\phi$ με $\phi(N)=0$. Τότε, $\forall A \subseteq N$, $\phi(A)=0$ επίσης (μονοτονία), άρα $A\in\mathcal{M}_\phi$ από παρατήρηση 1.

■