Χάρη στο Θεώρημα του Καραθεοδωρή, ξέρουμε ότι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue $\lambda^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$, με $\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a_n, b_n), \; a_n \leq b_n \text{ στο } \mathbb{R} \right\}$

$\forall A \subseteq \mathbb{R}$,

είναι πλήρες μέτρο όταν περιοριστεί στη σ-άλγεβρα

$$\mathcal{M}_{\lambda^*} = \{ B \subseteq \mathbb{R} : \underbrace{\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \setminus B) \;\; \forall A \subseteq \mathbb{R}}_{B \;\; \lambda^*\text{-μετρήσιμο}} \}.$$

Ορίζουμε το μέτρο (πλήρες) $\lambda := \lambda^*_{|\mathcal{M}_{\lambda^*}}$ ως το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$ και αποκαλούμε τη $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ Lebesgue σ-άλγεβρα.

Τώρα δείχνουμε ότι η $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ (πρακτικά, τα σύνολα πάνω στα οποία το μήκος είναι αριθμήσιμα προσθετικό) είναι μεγάλη:

<u>Πρόταση:</u> $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$.

<u>Απόδειξη:</u> $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\{(-\infty,b] : b\in\mathbb{R}\}\right)$.

Άρα, αφού η $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ είναι σ-άλγεβρα,

αρκεί ΝΔΟ $(-\infty,b] \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ $\forall\, b\in\mathbb{R}$.

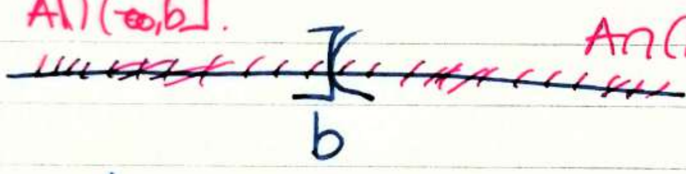
Δηλ., αντί να δείξουμε ότι <u>κάθε</u> <u>σύνολο Borel</u> "κόβει καλά" όλα τα $\subseteq\mathbb{R}$, δείχνουμε ότι απλά οι <u>ημιευθείες</u> έχουν αυτή την ιδιότητα.

Έστω $b\in\mathbb{R}$ και $A\subseteq\mathbb{R}$.

$\leq$: πάντα αληθής.

<u>Στόχος:</u> $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A\cap(-\infty,b])$

$$+\ \lambda^*\big(\underbrace{A\setminus(-\infty,b]}_{=\,A\cap(b,+\infty)}\big)$$



Το $\lambda^*(A)$ είναι το <u>μέγιστο</u> κάτω φράγμα του

$$\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n) : A\subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n,b_n),\ a_n\leq b_n \text{ στο } \mathbb{R}\right\}.$$

Άρα, αρκεί ΝΔΟ το $\lambda^*(A\cap(-\infty,b]) + \lambda^*(A\cap(b,+\infty))$

είναι απλά <u>κάτω φράγμα</u> του ίδιου συνόλου.

Οπότε, έστω $A\subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n,b_n)$ με $a_n\leq b_n$ στο $\mathbb{R}$.

Αρκεί ΝΔΟ, για την τυχαία αυτή κάλυψη,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n) \geq \lambda^*(A\cap(-\infty,b]) + \lambda^*(A\cap(b,+\infty)).$$

Αφού $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a_n, b_n)$, έχουμε:

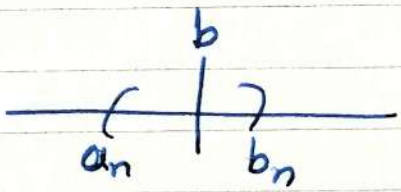
$$A \cap (-\infty, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big[\underbrace{\overbrace{(a_n, b_n) \cap (-\infty, b]}^{=: I_n}}_{\text{φραγμένο διάστημα}} \Big]$$

$$\text{και } A \cap (b, +\infty) \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Big[\underbrace{\overbrace{(a_n, b_n) \cap (b, +\infty)}^{= (a_n, b_n) \setminus I_n =: I_n'}}_{\text{ανοιχτό φραγμένο διάστημα}} \Big],$$

με $|I_n| + |(a_n, b_n) \setminus I_n| = |(a_n, b_n)|$ $\forall n$.

Πράγματι, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- Αν $a_n < b < b_n$,

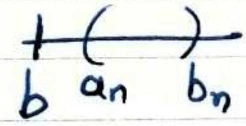


τότε $I_n = (a_n, b]$, $I_n' = (b, b_n)$,

και $|I_n| + |I_n'| = b_n - a_n$.

Συμβολίζουμε: $\forall$ I φραγμένο διάστημα, $|I| :=$ διαφορά των άκρων του I (= ευκλείδειο μήκος του I).

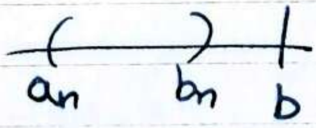
- Αν $b \leq a_n$,



τότε $I_n = \emptyset$, $I_n' = (a_n, b_n)$,

και $|I_n| + |I_n'| = b_n - a_n$.

- Αν $b \geq b_n$,



τότε $I_n = (a_n, b_n)$, $I_n' = \emptyset$

και $|I_n| + |I_n'| = b_n - a_n$

⊙ Αφού $A \cap (b, +\infty) \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{I_n'}_{\text{ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα,}}$

έχουμε ότι

$$\lambda^*(A \cap (b, +\infty)) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n'| .$$

⊙ $A \cap (-\infty, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$, όπου

κάθε I_n είναι φραγμένο διάστημα

$\forall \varepsilon > 0$,

$\rightarrow$ $I_n \subseteq \tilde{I}_n$ για κάποιο $\tilde{I}_n$ <u>ανοιχτό</u> φραγμένο διάστημα, με $(|I_n| \leq) |\tilde{I}_n| \leq |I_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$.

$\Rightarrow$ $A \cap (-\infty, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \tilde{I}_n$, όπου

κάθε $\tilde{I}_n$ είναι ανοιχτό, φραγμένο διάστημα.

Οπότε, $\lambda^*(A \cap (-\infty, b]) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\tilde{I}_n|$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| + \varepsilon .$$

Άρα, $\lambda^*(A \cap (b, +\infty)) + \lambda^*(A \cap (-\infty, b])$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n'| + \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| + \varepsilon$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (|I_n'| + |I_n|) + \varepsilon = \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n) + \varepsilon,$$

$\forall \varepsilon > 0$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow} \quad \lambda^*\big(A\cap(b,+\infty)\big) + \lambda^*\big(A\cap(-\infty,b]\big) \le \sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n),$$

όπως επιθυμούσαμε. ∎

Το ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$ σημαίνει ότι το

$\underset{\lambda_{|\mathcal{B}(\mathbb{R})}}{\overset{\lambda^*_{|\mathcal{B}(\mathbb{R})}}{\shortparallel}}$ είναι επίσης μέτρο.

Και: $\forall$ Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$,

το $\lambda(A)$ είναι απλά το $\lambda^*(A)$ (δηλ. έχουμε τύπο για το "μήκος" $\lambda(A)$).

Για παράδειγμα, $(a,b)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ και άρα

$$\lambda\big((a,b)\big) = \lambda^*\big((a,b)\big) = b-a,$$

$$\underset{\{q_1,q_2,\dots\}}{\overset{}{\mathbb{Q}}} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\{q_n\}}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \lambda(\mathbb{Q}) = \lambda^*(\mathbb{Q}) = 0,$$

$$[0,1]\setminus\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \lambda\big([0,1]\setminus\mathbb{Q}\big) \underset{\substack{\lambda \text{ μέτρο} \\ \text{στη } \mathcal{B}(\mathbb{R})}}{=} \overbrace{\lambda([0,1])}^{=1} - \underbrace{\lambda([0,1]\cap\mathbb{Q})}_{=0} = 1$$