Ορισμός: Ορίζουμε τη Borel σ-άλγεβρα στον $\mathbb{R}^d$ ως το σύνολο $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{T}_{d_2})$,

όπου $\mathcal{T}_{d_2} := \{$ ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ ως προς την Ευκλείδεια μετρική $d_2 \}$

$= \{$ ενώσεις από ανοιχτές μπάλες $B_{d_2}(x,r) \}$

$= \{$ αριθμήσιμες ενώσεις από ανοιχτές μπάλες $B_{d_2}(x,r) \}$. ■

$B_{d_2}(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^d : d_2(y,x) < r \}$

ειδικά στον $\mathbb{R}^d$!

$\left(d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_d-y_d)^2}, \ \forall x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d \right)$.

→ <u>Παρατήρηση:</u> Ξέρουμε ότι η Ευκλείδεια μετρική d_2 είναι ισοδύναμη με τη μετρική d_∞, όπου

$$d_\infty(x,y) := \max_{i=1,\dots,d} |x_i - y_i|,$$

$$\forall\, x=(x_1,\dots,x_d),\ y=(y_1,\dots,y_d) \in \mathbb{R}^d.$$

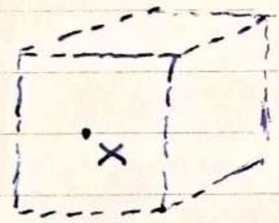
Άρα, $\mathcal{T}_{d_2} \overset{(*)}{=} \mathcal{T}_{d_\infty} := \{$ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ ως προς τη μετρική $d_\infty\}$

$= \{$ενώσεις από ανοιχτές μπάλες $B_{d_\infty}(x,r)\}$

$= \{$<u>αριθμήσιμες</u> ενώσεις από ανοιχτές μπάλες $\boxed{B_{d_\infty}(x,r)}\}$.

ειδικά στον $\mathbb{R}^d$.

<u>διαστήματα</u> του $\mathbb{R}^d$! (κύβοι)



$$B_{d_\infty}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : d_\infty(y,x) < r\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R}^d : |x_1 - y_1| < r,\ |x_2 - y_2| < r,\ \dots,\ |x_d - y_d| < r\}$$

= κύβος (ανοιχτός) με κέντρο x και πλευρά $2r$.

⚠ Ακόμη και χωρίς να γνωρίζει κανείς για ισοδύναμες μετρικές, εύκολα βλέπει ότι μία ανοιχτή μπάλα $B_{d_2}(x,r)$ είναι ένωση ανοιχτών κύβων, και αντίστροφα ότι κάθε ανοιχτός κύβος $B_{d_\infty}(x,r)$ είναι ένωση από ανοιχτές μπάλες. Γι' αυτό ισχύει η (*).

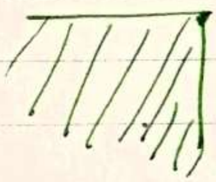
→ **Πρόταση:** Έστω $\mathcal{D}_1 := \left\{ \prod_{i=1}^{d} (a_i, b_i) : a_i \leq b_i \text{ στο } \mathbb{R} \text{ και } b_1 - a_1 = \dots = b_d - a_d \right\}$,

οι ανοιχτοί κύβοι του $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{D}_2 := \left\{ \prod_{i=1}^{d} (a_i, b_i) : a_i \leq b_i \text{ στο } \mathbb{R} \right\}$$

τα ανοιχτά ορθογώνια του $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{D}_3 := \left\{ \prod_{i=1}^{d} (-\infty, b_i] : b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

οι "γωνίες" αυτής της μορφής: 

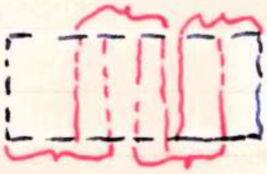
Τότε, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{D}_1) = \sigma(\mathcal{D}_2) = \sigma(\mathcal{D}_3)$.

Απόδειξη: (1) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{D}_1)$:

- $\underbrace{\mathcal{D}_1}_{\text{ανοιχτά}} \subseteq \mathcal{T}_{d_\infty} \subseteq \sigma(\mathcal{T}_{d_\infty}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \sigma(\mathcal{D}_1) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- $\mathcal{T}_{d_\infty} \subseteq \sigma(\mathcal{D}_1)$, καθώς κάθε ανοιχτό σύνολο ως προς την d_∞ είναι αριθμήσιμη ένωση από ανοιχτούς κύβους $B_{d_\infty}(x, r)$, άρα από στοιχεία της $\mathcal{D}_1$. Οπότε, $\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \right) \sigma(\mathcal{T}_{d_\infty}) \subseteq \sigma(\mathcal{D}_1)$.

② $\sigma(\mathcal{D}_1)=\sigma(\mathcal{D}_2)$:

- $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{D}_1)\subseteq\sigma(\mathcal{D}_2)$.
- Κάθε στοιχείο της $\mathcal{D}_2$ είναι ένα ανοιχτό ορθογώνιο, άρα είναι αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών κύβων, δηλ. ανήκει στη $\sigma(\mathcal{D}_1)$.



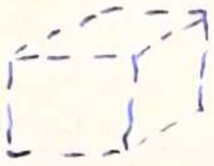
Δηλαδή, $\mathcal{D}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{D}_1)$

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{D}_2)\subseteq\sigma(\mathcal{D}_1)$.

③ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)=\sigma(\mathcal{D}_3)$:

- $\mathcal{D}_3 \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: Κάθε $\prod_{i=1}^{d}(-\infty,b_i]$ είναι κλειστό ως προς την d_2, και άρα ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ως συμπλήρωμα κάποιου ανοιχτού ως προς d_2 (και άρα Borel) συνόλου.
  Άρα, $\sigma(\mathcal{D}_3)\subseteq\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- $\underset{\sigma(\mathcal{D}_1)}{\underset{\parallel}{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}} \subseteq \sigma(\mathcal{D}_3)$:

Αρκεί ΝΔΟ $\mathcal{D}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{D}_3)$, δηλαδή ότι κάθε ανοιχτός κύβος $\prod_{i=1}^{d}(a_i,b_i)$ ανήκει στη $\sigma(\mathcal{D}_3)$.

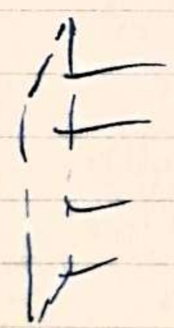
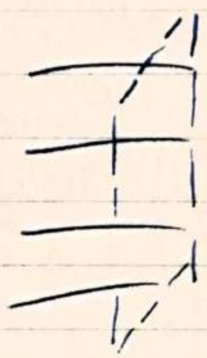


Κάθε ανοιχτός κύβος είναι πεπερασμένη τομή ανοιχτών υποχώρων, κάθε ένας από τους οποίους είναι ή "οριζόντιος" (δηλ. το υπερεπίπεδο που τον διαχωρίζει από το συμπλήρωμά του είναι οριζόντιο)

$= \mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}\times(a,+\infty)$

$= \mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}\times(-\infty,a)$

ή "κατακόρυφος" (δηλ. το υπερεπίπεδο που τον διαχωρίζει από το συμπλήρωμά του είναι παράλληλο σε ένα από τα κατακόρυφα υπερεπίπεδα που παράγονται από τους βασικούς άξονες)

 ,  , ...

Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε τέτοιος υπόχωρος είναι της μορφής $\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}\times I\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$, όπου το I

είναι της μορφής $(-\infty, a)$ ή $(a, +\infty)$ και βρίσκεται σε κάποια (οποιαδήποτε) θέση $i \in \{1, \dots, d\}$ στο καρτεσιανό γινόμενο.

Αρκεί ΝΔΟ κάθε τέτοιος υπόχωρος ανήκει στη $\sigma(\mathcal{D}_3)$.

→ Κάθε $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times (a, +\infty) \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$$= \mathbb{R}^d \setminus \left(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times (-\infty, a] \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \right),$$

και ανήκει στη $\sigma(\mathcal{D}_3)$ επειδή

$\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times (-\infty, a] \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \in \sigma(\mathcal{D}_3)$:

$$\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times (-\infty, a] \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-\infty, n] \times \dots \times (-\infty, n] \times (-\infty, a] \times (-\infty, n] \times \dots \times (-\infty, n]}_{\in \mathcal{D}_3}.$$

→ Κάθε $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times (-\infty, a) \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$$= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-\infty, n] \times \dots \times (-\infty, n] \times \left(-\infty, a - \tfrac{1}{n}\right] \times (-\infty, n] \times \dots \times (-\infty, n]}_{\in \mathcal{D}_3},$$

άρα ανήκει στη $\sigma(\mathcal{D}_3)$. ∎