→ Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$:

Ορισμοί: (1) Ανοιχτό, φραγμένο διάστημα στον $\mathbb{R}^d$ είναι κάθε σύνολο της μορφής

$$I = \prod_{i=1}^{d} (a_i, b_i), \quad \text{όπου } a_i \le b_i \ \ \forall i=1,\dots,d$$

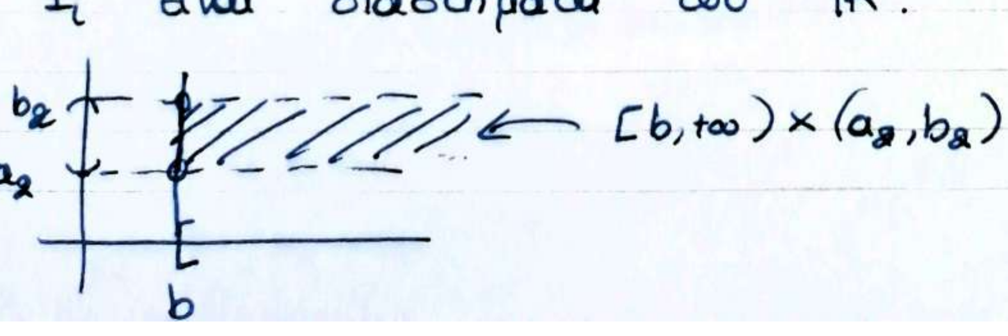
(εννοώντας πως αν $a_i = b_i$ για κάποιο i, στην οποία περίπτωση $(a_i,b_i)=\emptyset$, έχουμε και θα $\prod_{i=1}^{d}(a_i,b_i) := \emptyset$).

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue θα οριστεί χρησιμοποιώντας αριθμήσιμες καλύψεις από ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα, με στόχο να προσεγγιστεί ο d-διάστατος όγκος ενός συνόλου.

Ο όγκος του I ορίζεται ως

$$v(I) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_d - a_d).$$

(2) Ως διάστημα στον $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε κάθε σύνολο της μορφής $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$, όπου τα I_i είναι διαστήματα του $\mathbb{R}$.



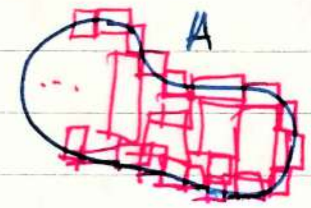
(όλα τα ορθογώνια, φραγμένα ή άφρακτα, με πλευρές παράλληλες στους βασικούς άξονες).

Αν όλα τα $I_1, \dots, I_d$ είναι <u>φραγμένα</u>, τότε ο <u>όγκος</u> του $I = I_1 \times \dots \times I_d$ ορίζεται ως

$v(I) = \lambda(I_1) \cdot \ldots \cdot \lambda(I_d)$ (όπου το λ είναι το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, και άρα το $\lambda(I_i)$ είναι απλά το μήκος του I_i).

(3) $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$, ορίζουμε

$$\lambda_d^*(A) := \inf\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n) \ : \ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \ , \ I_n \ \underline{\text{φραγμένα ανοιχτά διαστήματα}} \text{ του } \mathbb{R}^d \right\}.$$



μία καλή προσέγγιση του d-διάστατου όγκου του A

Το λ_d^* είναι <u>εξωτερικό μέτρο στον $\mathbb{R}^d$</u>, και το αποκαλούμε το <u>εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$</u>.

Πράγματι, το λ_d^* προκύπτει από τη γενική κατασκευή εξωτερικών μέτρων που έχουμε περιγράψει, με

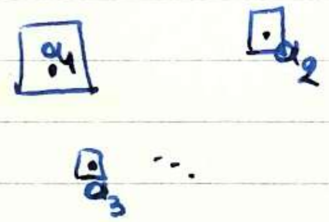
- $\mathcal{C} :=$ {ανοιχτά φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}^d$}, σ-κάλυψη του $\mathbb{R}^d$ $\left(\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{[-n,n]^d}_{\text{κύβος}} \right)$.

• $\tau(I) := v(I)$ (≥ 0) $\forall\, I \in \mathcal{C}$. Άρα και $\tau(\emptyset) = v(\emptyset) = 0$

⇒ Άσκηση: $\lambda_d^*(A) = 0$, $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^d$ αριθμήσιμο.

Λύση: α' τρόπος: $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Έστω $\varepsilon > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, I_n$ ανοιχτό, φραγμένο διάστημα (π.χ. ανοιχτό κυβάκι) ώστε



$$a_n \in I_n \quad \text{και} \quad v(I_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

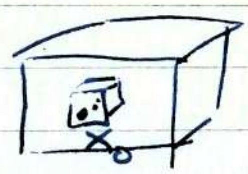
Άρα, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n) < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lambda^*(A) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lambda^*(A) = 0.$$

β' τρόπος: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^d$, έχουμε: $\lambda_d^*(\{x_0\}) = 0$.

Πράγματι, $\forall \varepsilon > 0$, $\{x_0\} \subseteq \prod_{i=1}^{d} (x_{0,i} - \varepsilon, x_{0,i} + \varepsilon)$



$$\Rightarrow \lambda^*(\{x_0\}) \leq v\left(\prod_{i=1}^{d} (x_{0,i} - \varepsilon, x_{0,i} + \varepsilon)\right) = \prod_{i=1}^{d} (2\varepsilon) = (2\varepsilon)^d \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Άρα, $\lambda^*(\{x_0\}) = 0$.

Τώρα, $\forall\, A$ αριθμήσιμο $\subseteq \mathbb{R}^d$ έχουμε $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ για κάποια $a_i \in \mathbb{R}^d$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{a_n\} \xrightarrow[\text{μέτρων}]{\text{υποπροσθ. εξωτερικών}} \lambda_d^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\lambda_d^*(\{a_n\})}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0.$$

■

Ορισμός:
Αφού το $\lambda_d^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$ είναι εξωτερικό μέτρο, το $\lambda_d := \lambda_d^* \big|_{\mathcal{M}_{\lambda_d^*}}$ είναι πλήρες μέτρο. (δηλ., $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\lambda_d^*}, \lambda_d)$ πλήρης)

Το αποκαλούμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$, και αποκαλούμε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_{\lambda_d^*}$ τη Lebesgue σ-άλγεβρα στον $\mathbb{R}^d$.

Όπως και στον $\mathbb{R}$, ΘΔΟ:

① $\lambda_d^*(I) = v(I)$, $\forall$ φραγμένο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}^d$.

② Κάθε διάστημα I του $\mathbb{R}^d$ είναι στη $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ $(= \sigma(\{\text{ανοιχτά}\}))$.

③ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_d^*}$ $\left(\overset{①}{\Longrightarrow} \underset{\left(\overset{\shortparallel}{\lambda_d^*}\right)}{\lambda_d}(I) = v(I) \ \forall \text{ φραγμένο διάστημα } I \subseteq \mathbb{R}^d\right)$.

Ας δεχθούμε τα ①②③ για λίγο για να λύσουμε την παρακάτω άσκηση.

→ <u>Άσκηση:</u> Έστω $N \subseteq [0,1)$ το <u>σύνολο Vitali</u>.

(Ορίσαμε $x \sim y$ στο $[0,1)$ αν $x-y \in \mathbb{Q}$. Το N ήταν ένα σύνολο με ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Όπως στην Εβδομάδα 1, αλλά δουλεύοντας με το $\mathcal{M}_{\lambda_1^*}$ αντί για το $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, μπορούμε να δείξουμε ότι το $N \notin \mathcal{M}_{\lambda_1^*}$).

$\boxed{\text{Το } N \times \{0\} \text{ \underline{ανήκει} στη } \mathcal{M}_{\lambda_2^*}, \text{ και } \lambda_2(N\times\{0\}) = 0.}$

$\left(\overset{\shortparallel}{\lambda_2^*}\right)$

<u>Λύση:</u> Το $[0,1]\times\{0\}$ ανήκει στη $\mathcal{M}_{\lambda_2^*}$ (αφού είναι διάστημα) και $\lambda_2([0,1]\times\{0\}) \overset{③}{=} v([0,1]\times\{0\}) =$

$= 1 \cdot 0 = 0$

Όμως, ο $(\mathbb{R}^2, \lambda_2, \mathcal{M}_{\lambda_2^*})$ είναι πλήρης χώρος μέτρου.

Άρα, κάθε υποσύνολο του $[0,1]\times\{0\}$ είναι και αυτό στη $\mathcal{M}_{\lambda_2^*}$, και άρα και το λ_2-μέτρο του είναι 0.

Άρα, αφού $N\times\{0\}\subseteq[0,1]\times\{0\}$, έχουμε:

$$N\times\{0\}\in\mathcal{M}_{\lambda_2^*} \text{ και } \lambda_2\left(N\times\{0\}\right)=0.$$

Για να δείξουμε τα ①—③, χρειαζόμαστε το εξής:

→ $\boxed{\text{Λήμμα:}}$ ① Η τομή δύο διαστημάτων είναι διάστημα.

② Η οικογένεια A όλων των πεπερασμένων ενώσεων ξένων διαστημάτων είναι άλγεβρα.

③ Αν $I_1,\dots,I_m$ ξένα διαστήματα με

$$I_1\cup\dots\cup I_m \overset{(=)}{\subseteq} \underbrace{J}_{\text{διάστημα}},$$

τότε

$$v(I_1)+\dots+v(I_m)\overset{(=)}{\leq} v(J).$$

! ⚠ Σημασία έχει τι πραγματικά σημαίνει το ②.

Σημαίνει ότι (π.χ.):

- Κάθε πεπερασμένη ένωση διαστημάτων ανήκει στη Δ, και άρα γράφεται και ως πεπερασμένη ένωση ξένων διαστημάτων!

Δηλαδή,

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta &= \{\text{πεπ. ενώσεις } \underline{\text{ξένων}} \text{ διαστημάτων}\}.\\ &= \{\text{πεπ. ενώσεις διαστημάτων}\}.\end{aligned}}$$

- Αν I, J διαστήματα, τότε $I \setminus J \in \Delta$, άρα $I \setminus J$ = πεπερασμένη ένωση ξένων διαστημάτων.

<u>Απόδειξη</u>: ① Αν $I = \prod_{i=1}^{d} I_i$

και $J = \prod_{i=1}^{d} J_i$, όπου τα

I_i και J_i είναι διαστήματα του $\mathbb{R}$, τότε

$$I \cap J = \prod_{i=1}^{d} \underbrace{(I_i \cap J_i)}_{\substack{\text{τομή διαστημάτων} \\ \text{του } \mathbb{R}\text{, άρα διάστημα} \\ \text{(απλό).}}} \text{, διάστημα.}$$

② • $\emptyset \in \Delta$, αφού το $\emptyset$ είναι διάστημα.

• Η Δ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές:

Έστω $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, $B = \bigcup_{s=1}^{m} J_s$. Τότε,

διαστήματα

$$A \cap B = \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ s=1,\dots,m}} \underbrace{(I_i \cap J_s)}_{\text{διάστημα,}} \in \Delta .$$

ως τομή διαστημάτων

• Η Δ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα:

Έστω $A = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{I_i}_{\text{διάστημα}} \in \Delta$

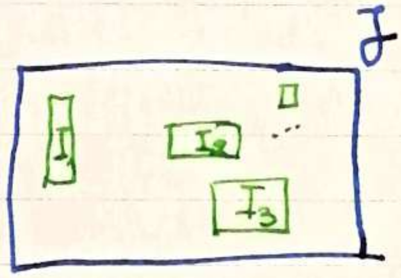
$$\rightarrow \mathbb{R}^d \setminus A = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \underbrace{(\mathbb{R}^d \setminus I_1)}_{\in \Delta,} \cap \dots \cap \underbrace{(\mathbb{R}^d \setminus I_n)}_{\in \Delta,},$$

ως συμπληρώματα διαστημάτων (απλή άσκηση).

που $\in \Delta$ αφού η Δ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές.

(3) ΘΔΟ $\forall m \in \mathbb{N}$ και $I_1, I_2, \dots, I_m$ ξένα διαστήματα με $I_1 \cup \dots \cup I_m \subseteq \underbrace{J}_{\text{διάστημα}}$,

έχουμε $v(I_1) + \dots + v(I_m) \le v(J)$.



(Η απόδειξη στην περίπτωση ισότητας είναι ίδια, απλά αντικαθιστούμε τα $\subseteq$, $\le$ με $=$).

- Ο ισχυρισμός ισχύει για $m=1$:

Αν $I_1 \subseteq J$, με I_1, J διαστήματα, τότε $v(I_1) \le v(J)$, αφού:

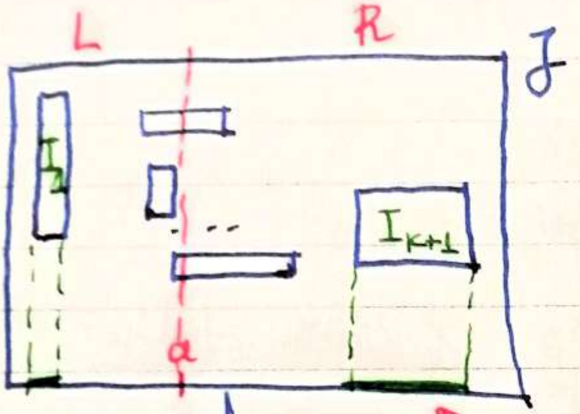
$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \prod_{i=1}^{d} \underbrace{\Delta_i}_{\substack{\text{διαστήματα} \\ \text{στο } \mathbb{R}}} \\ J &= \prod_{i=1}^{d} \overbrace{\Delta_i'} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I_1 \subseteq J} \Delta_i \subseteq \Delta_i' \ \forall i = 1, \dots, d$$

$$\Rightarrow \lambda(\Delta_1) \cdot \ldots \cdot \lambda(\Delta_d) \le \lambda(\Delta_1') \cdot \ldots \cdot \lambda(\Delta_d'),$$

δηλ. $v(I_1) \le v(J)$.

- Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $m=k$.
- ΘΔΟ ο ισχυρισμός ισχύει για $m=k+1$. Πράγματι, έστω $I_1, \dots, I_{k+1}$ ξένα διαστήματα με

$I_1 \cup \ldots \cup I_{k+1} \subseteq J$, για κάποιο διάστημα J.



⚠ Η προβολή των I_1 , I_{k+1} σε κάποιο άξονα x_s είναι κενή (αφού $I_1 \cap I_{k+1} = \phi$)

$$I_1 = \prod_{i=1}^{d} \underbrace{I_{1,i}}_{\text{διαστήματα στο } \mathbb{R}} \quad , \quad I_{k+1} = \prod_{i=1}^{d} \underbrace{I_{k+1,i}}_{\text{διαστήματα στο } \mathbb{R}} \quad ,$$

άρα $$I_1 \cap I_{k+1} = \prod_{i=1}^{d} \left(I_{1,i} \cap I_{k+1,i} \right).$$

Αφού $I_1 \cap I_{k+1} = \phi$, $\exists\, s \in \{1, \ldots, d\}$ ώστε

$$\underbrace{I_{1,s}} \cap \underbrace{I_{k+1,s}} = \phi.$$

διαστήματα στο $\mathbb{R}$

Οπότε, $\exists\, a \in \mathbb{R}$ τ.ώ. το $I_{1,s}$ να βρίσκεται αριστερά από το a, και το $I_{k+1,s}$ να βρίσκεται δεξιά από το a. Πιο συγκεκριμένα, ορίζοντας $L = \{ x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_s \leq a \}$

και $R = \{ x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_s > a \}$, έχουμε ότι $I_1 \subseteq L$, $I_{k+1} \subseteq R$, $L \cap R = \emptyset$.

Παρατηρούμε ότι τα L, R είναι διαστήματα με $L \sqcup R = \mathbb{R}^d$. Οπότε:

- Τα $I_1, \underbrace{I_2 \cap L, I_3 \cap L, \dots, I_k \cap L}_{\substack{\text{διαστήματα,} \\ \text{ως τομές 2 διαστημάτων}}}$

είναι k ξένα διαστήματα που περιέχονται στο διάστημα $J \cap L$. Από επαγωγική υπόθεση,

$$(*_1) \quad v(I_1) + v(I_2 \cap L) + \dots + v(I_k \cap L) \leq v(J \cap L).$$

- Τα $I_2 \cap R, \dots, I_k \cap R, I_{k+1}$ είναι k ξένα διαστήματα που περιέχονται στο διάστημα $J \cap R$.

Από επαγωγική υπόθεση,

$$(*_2) \quad v(I_2 \cap R) + \dots + v(I_k \cap R) + v(I_{k+1}) \leq v(J \cap R).$$

Και:

$$(*_1),(*_2) \xrightarrow{+} v(I_1) + \sum_{j=2}^{k} \left[v(I_j \cap L) + v(I_j \cap R) \right] + v(I_{k+1})$$

$$\leq v(J \cap L) + v(J \cap R).$$

Τώρα, $v(J\cap L)+v(J\cap R)=v(J)$ — απλά, από τον τύπο του όγκου v.

και $v(I_j\cap L)+v(I_j\cap R)=v(I_j)$ $\forall j=2,\dots,k$,

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. ■

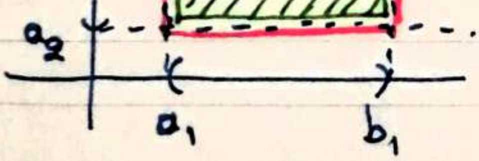
→ **Πρόταση:** $\forall$ φραγμένο διάστημα $I\subseteq\mathbb{R}^d$,

$$\lambda_d^*(I)=v(I).$$

Απόδειξη: Το δείχνουμε πρώτα για κλειστό, φραγμένο διάστημα I, δηλαδή της μορφής $\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i]$. Τα υπόλοιπα προκύπτουν εύκολα με προσέγγιση από τέτοια διαστήματα.

$\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i)$, $\prod_{i=1}^{d}(a_i,b_i)$, $\prod_{i=1}^{d}(a_i,b_i]$

(Για παράδειγμα, έστω $U=\prod_{i=1}^{d}(a_i,b_i)$, $a_i<b_i\ \forall i$. Τότε,



$$\underbrace{K_n=\prod_{i=1}^{d}\left[a_i+\tfrac{1}{n},\,b_i-\tfrac{1}{n}\right]}_{K_n,\ \text{κλειστό φραγμένο διάστημα}}\subseteq U\subseteq\underbrace{\prod_{i=1}^{d}[a_i,b_i]}_{I,\ \text{κλειστό φραγμένο διάστημα}}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο.

Άρα, $\overbrace{\lambda_d^*(K_n)}^{v(K_n) \,=} \le \lambda_d^*(\mathcal{U}) \le \overbrace{\lambda_d^*(I)}^{=\, v(I)}$ (από μονοτονία εξωτ. μέτρων),

δηλαδή $\prod_{i=1}^{d}\left(b_i - a_i - \frac{2}{n}\right) \le \lambda_d^*(\mathcal{U}) \le \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$

για όλα τα μεγάλα $n \in \mathbb{N}$

$$\xRightarrow{n \to +\infty} \lambda_d^*(\mathcal{U}) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$$

$$\Rightarrow \lambda_d^*(\mathcal{U}) = v(\mathcal{U}).$$

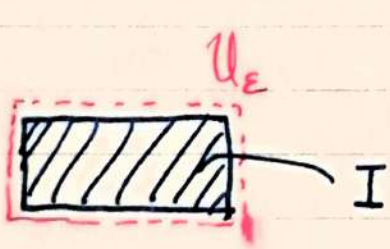
)

Έστω λοιπόν I κλειστό, φραγμένο διάστημα.

Τότε, $I = \prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i]$ για κάποια $a_i \le b_i$ στο $\mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$.

- $\lambda_d^*(I) \le v(I) \quad \left(= \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)\right)$:

$\forall \varepsilon > 0$,



$$I \subseteq \mathcal{U}_\varepsilon := \prod_{i=1}^{d}(a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lambda_d^*(I) \le v(\mathcal{U}_\varepsilon) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i + 2\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\xRightarrow{\varepsilon \to 0} \lambda_d^*(I) \le \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i) = v(I)$$

- $v(I) \leq \lambda_d^*(I)$, δηλ. το $v(I)$ είναι κάτω φράγμα για το $\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n) : \text{τα } I_n \text{ είναι ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα του } \mathbb{R}^d \text{ με } I \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \right\}$:

Πράγματι, έστω $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$, όπου τα I_n είναι ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}^d$.

$\boxed{\text{ΘΔΟ} \quad v(I) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n)}$:

Το I είναι <u>κλειστό, φραγμένο</u> $\subseteq \mathbb{R}^d$, και άρα συμπαγές. Οπότε, καλύπτεται από <u>πεπερασμένα</u> από τα ανοιχτά $I_1, I_2, \ldots$, δηλ. $\exists\, N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$I \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_n$$

$$= \bigcup_{s=1}^{M} J_s$$

, για κάποια <u>ξένα</u> διαστήματα $J_1, \ldots, J_M$ $(M \in \mathbb{N})$.

η οικογένεια Δ των πεπ. ενώσεων ξένων διαστημάτων είναι άλγεβρα

Μάλιστα, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι

καθε ένα από τα J_s περιέχεται σε κάποιο από

τα I_n :

Μπορούμε να θεωρήσουμε $J_1 := I_1$. $(\subseteq I_1)$

$\rightsquigarrow$ $I_2 \setminus I_1 \in \Delta$ (Δ άλγεβρα)

$\Rightarrow$ $I_2 \setminus I_1$ = ξένη ένωση διαστημάτων

$J_2^{(1)}, \dots, J_2^{(k_2)}$, που φυσικά περιέχονται

στο I_2 και είναι ξένα με το $I_1 = J_1$.

$\rightsquigarrow$ $I_3 \setminus (I_1 \cup I_2) \in \Delta$ (Δ άλγεβρα)

$\Rightarrow$ $I_3 \setminus (I_1 \cup I_2)$ = ξένη ένωση διαστημάτων

$J_3^{(1)}, \dots, J_3^{(k_3)}$, που φυσικά περιέχονται στο I_3

και είναι ξένα με το $I_1 \cup I_2$, άρα με τα

J_1, $J_2^{(1)}, \dots, J_2^{(k_2)}$,

κ.ο.κ.

$$\text{Άρα, } \underbrace{I}_{\text{διάστημα}} = \bigcup_{n=1}^{N} (I \cap I_n) = \bigcup_{s=1}^{M} \underbrace{(I \cap J_s)}_{\text{διαστήματα, ξένα,}}$$

καθε ένα από τα οποία περιέχεται σε κάποιο από τα $I \cap I_n$

Από το ③ του προηγούμενου Λήμματος,

$$v(I) = \sum_{s=1}^{M} v(I \cap J_s)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{\substack{s\in\{1,\dots,M\}: \\ I\cap J_s \subseteq I\cap I_n}} v(\underbrace{I \cap J_s}_{\substack{\text{ξένα} \\ \text{διαστήματα,} \\ \subseteq \text{διάστημα} \\ I\cap I_n}}) \right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} v(\underbrace{I \cap I_n}_{\subseteq I_n}) \leq \sum_{n=1}^{N} v(I_n).$$

■

! Τώρα θα δείξουμε ότι η Lebesgue σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_{\lambda_d^*}$ περιέχει τη Borel, και άρα είναι <u>μεγάλη</u>.

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\mathcal{M}_{\lambda_d^*} = \{ B \subseteq \mathbb{R}^d : \underbrace{B \text{ είναι } \lambda_d^* \text{ μετρήσιμο}}_{\Updownarrow} \}$$

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^d,\ \lambda_d^*(A) \geq \lambda_d^*(A \cap B) + \lambda_d^*(A \setminus B).$$

→ <u>Συμβολισμός</u>: Από εδώ και στο εξής, συμβολίζουμε τη Lebesgue σ-άλγεβρα στον $\mathbb{R}^d$ ως $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ (δηλ., $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) := \mathcal{M}_{\lambda_d^*}$).

→ <u>Πρόταση</u>: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

<u>Απόδειξη:</u> Ξέρουμε ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ παράγεται από τα σύνολα της μορφής $\prod_{i=1}^{d} (-\infty, b_i]$, όπου $b_i \in \mathbb{R}$ $\forall i$.

Αφού η $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ είναι σ-άλγεβρα, αρκεί ΝΔΟ κάθε σύνολο της παραπάνω μορφής ανήκει στην $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}_{\lambda_d^*}$.

Έστω λοιπόν $K = \prod_{i=1}^{d} (-\infty, b_i]$, για κάποια $b_i \in \mathbb{R}$.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. ΘΔΟ

$$\boxed{\lambda_d^*(A) \geq \lambda_d^*(A\cap K) + \lambda_d^*(A\setminus K).}$$

Αφού $\lambda_d^*(A) = \inf S$, όπου

$$S = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \ , I_n \text{ ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα του } \mathbb{R}^d \right\},$$

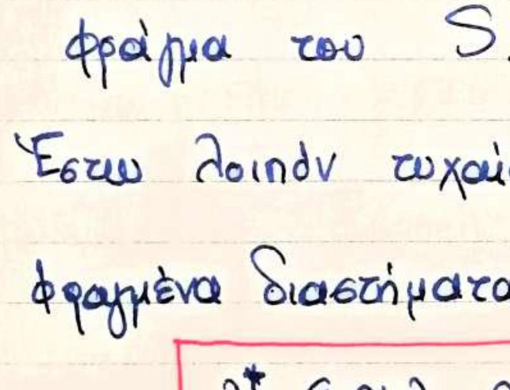
αρκεί ΝΔΟ $\lambda_d^*(A\cap K) + \lambda_d^*(A\setminus K)$ είναι κάτω φράγμα του S.

Έστω λοιπόν τυχαία κάλυψη $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ από ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα I_n. Αρκεί ΝΔΟ

$$\boxed{\lambda_d^*(A\cap K) + \lambda_d^*(A\setminus K) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n)}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$.

- $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \Rightarrow A\cap K \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(I_n \cap K)}$



διάστημα, ως τομή 2 διαστημάτων, άρα $\subseteq I_n'$, για κάποιο ανοιχτό, φραγμένο διάστημα I_n' με $\left(v(I_n\cap K) \leq\right) v(I_n') \leq v(I_n\cap K) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

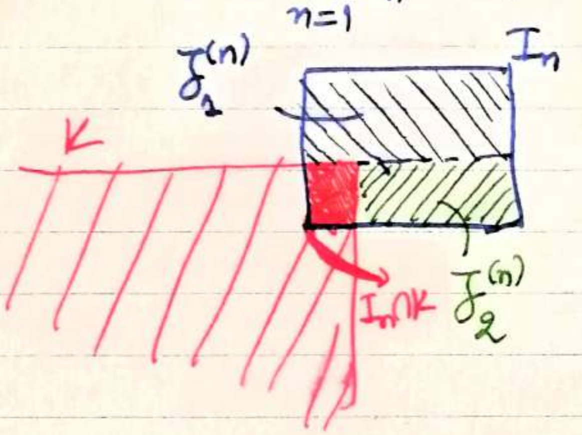
$$\subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{I_n'}_{\text{ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα}}.$$

Άρα, $\lambda_d^*(A\cap K) \le \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n')$

$$\le \sum_{n=1}^{+\infty}\left(v(I_n\cap K)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n\cap K) + \varepsilon .$$

• $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \Rightarrow A\setminus K \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(I_n\setminus K)}$ $\in\Delta$ (άλγεβρα), άρα = ξένη ένωση διαστημάτων (φραγμένων) $J_1^{(n)},\dots,J_{k_n}^{(n)}$.



Κάθε $J_i^{(n)}$ περιέχεται σε κάποιο ανοιχτό, φραγμένο διάστημα $\tilde{J}_i^{(n)}$ με περίπου τον ίδιο όγκο –

με αποτέλεσμα να έχουμε, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$I_n\setminus K = \underbrace{J_1^{(n)} \amalg \dots \amalg J_{k_n}^{(n)}}_{\text{ξένα διαστήματα}}$$

περίπου ίδιος όγκος

$$\subseteq \underbrace{\tilde{J}_1^{(n)} \cup \dots \cup \tilde{J}_{k_n}^{(n)}}_{\text{ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα}}$$

και $v(\tilde{J}_1^{(n)})+\dots+v(\tilde{J}_{k_n}^{(n)}) \le v(J_1^{(n)})+\dots+v(J_{k_n}^{(n)}) + \varepsilon/2^n$.

Άρα, $\lambda_d^*(A \setminus K) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(v(\tilde{J}_1^{(n)}) + \dots + v(\tilde{J}_{k_n}^{(n)}) \right)$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(v(J_1^{(n)}) + \dots + v(J_{k_n}^{(n)}) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(v(J_1^{(n)}) + \dots + v(J_{k_n}^{(n)}) \right) + \varepsilon.$$

Οπότε, $\lambda_d^*(A \cap K) + \lambda_d^*(A \setminus K) \leq$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(v(\underbrace{I_n \cap K}) + v(\underbrace{J_1^{(n)}}) + \dots + v(\underbrace{J_{k_n}^{(n)}}) \right) + 2\varepsilon$$

ξένα διαστήματα, $\subseteq$ διάστημα I_n

$\overset{③ \text{ Λήμματος}}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n) + 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\overset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} \lambda_d^*(A \cap K) + \lambda_d^*(A \setminus K) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n).$$

■