Ο στόχος μας, τώρα που δείξαμε ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, είναι να δείξουμε ότι η $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ είναι η πλήρωση της $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ως προς το μέτρο Lebesgue λ $(=\lambda_d)$.

→ <u>Υπενθύμιση</u>: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

$$\mathcal{A}_\mu := \{ A \subseteq X : \exists\, E, F \in \mathcal{A} \text{ με } E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \mu(F \setminus E) = 0 \}$$

τα $\subseteq X$ που προσεγγίζονται καλά (ως προς μ), πάνω και κάτω, από σύνολα της $\mathcal{A}$

Ορίσαμε $\bar{\mu}(A) := \mu(E)$ $\forall A \in \mathcal{A}_\mu$ και E όπως παραπάνω.

Δείξαμε ότι ο $(X, \mathcal{A}_\mu, \bar{\mu})$ είναι πλήρης χώρος μέτρου. Αποκαλέσαμε την $\mathcal{A}_\mu$ την πλήρωση της $\mathcal{A}$ ως προς μ.

→ <u>Στόχος</u>: $\boxed{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d).}$

Η μία πλευρά είναι εύκολη, καθώς ο $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ είναι <u>πλήρης</u>:

→ <u>Πρόταση</u>: $\boxed{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda \longrightarrow \exists\, E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \text{και} \quad \lambda(F \setminus E) = 0.$$

Άρα, $A = \underbrace{E}_{\substack{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \\ \text{άρα } \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}} \cup \underbrace{(A \setminus E)}_{\subseteq F \setminus E}$, με $F \setminus E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ και $\lambda(F \setminus E) = 0$.

Αφού ο $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ είναι πλήρης, η $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ περιέχει όλα τα υποσύνολα του $F\setminus E$, άρα και το $A\setminus E$. Δηλαδή, $A\setminus E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Οπότε, $A = \underbrace{E}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} \cup \underbrace{(A\setminus E)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

■

Από εδώ και στο εξής λοιπόν, θα εστιάσουμε στο ΝΔΟ:

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_{|\lambda}.$$

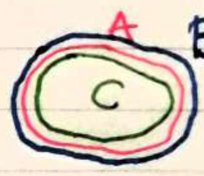
Για να γίνει αυτό, πρέπει να βρούμε έναν βολικό χαρακτηρισμό των στοιχείων της $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_{|\lambda}$.

Είναι τα υποσύνολα A του $\mathbb{R}^d$ που προσεγγίζονται καλά (ως προς το λ), άνω και κάτω, από σύνολα Borel. Οπότε, οι ποσότητες

$$\inf\{\lambda(B) : B \text{ Borel}, A \subseteq B\}$$

και

$$\sup\{\lambda(C) : C \text{ Borel}, C \subseteq A\}$$



θα είναι πολύ σχετικές, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$.

(Για στοιχεία A της πλήρωσης $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_{\lambda}$, θα πρέπει να είναι ίσες...)

→ <u>Πρόταση:</u> $\forall\ A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\lambda^*(A) = \overbrace{\inf\{\lambda(B) : B \text{ Borel},\ A \subseteq B\}}^{\beta}$$
$$= \underbrace{\inf\{\lambda(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ ανοιχτό},\ A \subseteq \mathcal{U}\}}_{\gamma}.$$

⚠ Άρα: Αν $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, τότε

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(B) : B \text{ Borel},\ A \subseteq B\}$$
$$= \inf\{\lambda(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ ανοιχτό},\ A \subseteq \mathcal{U}\}$$

<u>Απόδειξη:</u> ΘΔΟ $\lambda^*(A) \leq \beta \leq \gamma \leq \lambda^*(A)$:

- $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) = \lambda(B)$, $\forall$ B Borel με $A \subseteq B$

$$\Rightarrow \lambda^*(A) \leq \underbrace{\inf\{\lambda(B) : B \text{ Borel},\ A \subseteq B\}}_{= \beta}.$$

- $\beta \leq \gamma$: Αν $\mathcal{U}$ ανοιχτό, τότε $\mathcal{U}$ Borel.

Άρα, $\{B \text{ Borel} : B \supseteq A\} \supseteq \{\mathcal{U} \text{ ανοιχτό} : \mathcal{U} \supseteq A\}$

$$\Rightarrow \{\lambda(B) : \text{——}\,''\,\text{——}\} \supseteq \{\lambda(\mathcal{U}) : \text{——}\,''\,\text{——}\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\inf\{\text{——}\,''\,\text{——}\}}_{= \beta} \leq \underbrace{\inf\{\text{——}\,''\,\text{——}\}}_{= \gamma}.$$

- $\gamma \leq \lambda^*(A)$:

Αν $\lambda^*(A) = +\infty$, ΟΚ.

Αν $\lambda^*(A) < +\infty$, τότε $\exists\, I_1, I_2, \ldots$ ανοιχτά, φραγμένα διαστήματα στον $\mathbb{R}^d$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$

και $\lambda^*(A) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n) - \varepsilon = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(I_n) - \varepsilon.$

$$\underset{\text{υποπροσθ. μέτρων}}{\geq} \lambda\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n}_{\substack{= G, \text{ ανοιχτό}, \\ G \supseteq A}}\Big) - \varepsilon$$

Άρα, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, G$ ανοιχτό με $G \supseteq A$

και $\lambda(G) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\gamma = \inf\{\lambda(G) : G \text{ ανοιχτό}, G \supseteq A\}$

$$\leq \lambda^*(A) + \varepsilon$$

$\overset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow}$ $\gamma \leq \lambda^*(A)$. ∎

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

→ <u>Ορισμός:</u> Ορίζουμε το εσωτερικό μέτρο Lebesgue του A, $\lambda_*(A)$, ως

$$\lambda_*(A) := \sup\{\lambda(C) : C \text{ Borel}, C \subseteq A\}.$$

ΘΔΟ, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda^*(A) < +\infty$,

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda \overset{(1)}{\iff} \lambda^*(A) = \lambda_*(A)$$

$$\overset{(2)}{\iff} A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d).$$

• Η (1) θα βγει απλά, και μάλιστα για γενικότερα μέτρα (απλά επαναλαμβάνει τον ορισμό της πλήρωσης)

• Η (2) θέλει δουλειά. Μάλιστα, θα δείξουμε ότι μια κατεύθυνση ισχύει και χωρίς $\lambda^*(A) < +\infty$:

→ Αν $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, τότε $\lambda(A) = \lambda_*(A)$

νέος τύπος για το $\lambda(A)$ $= \sup\{\lambda(C) : C \text{ Borel}, C \subseteq A\}$

⚠ Αν $\lambda^*(A) = \lambda_*(A) = +\infty$, τότε δεν μπορούμε να ελπίζουμε ότι αναγκαστικά $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda$ ή ότι $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Αυτό θα σήμαινε ότι όλα τα υποσύνολα ενός A με $\lambda_*(A) = +\infty$ θα ανήκαν και αυτά στην $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda$ και στην $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

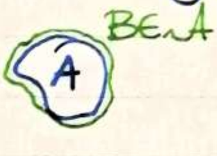
εφαρμογή: $(X,\mathcal{A},\mu)=(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$.

Θα ασχοληθούμε πρώτα με την (1), που ισχύει σε πιο γενικούς χώρους:

→ **Ορισμός:** Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου. $\forall A\subseteq X$, ορίζουμε:

① το εξωτερικό μέτρο του A ως προς μ ως εξής:

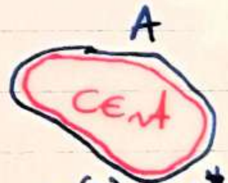
$$\mu^*(A):=\inf\{\mu(B):\ B\in\mathcal{A},\ B\supseteq A\}$$



(⚠ Στον $(X,\mathcal{A},\mu)=(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$, έχουμε δείξει ότι $\mu^*=\lambda^*$, το εξωτερικό μέτρο Lebesgue)

② το εσωτερικό μέτρο του A ως προς μ ως εξής:

$$\mu_*(A)=\sup\{\mu(C):\ C\in\mathcal{A},\ C\subseteq A\}$$



Παρατηρήσεις: (i) Αν $A\in\mathcal{A}$, τότε $\mu(A)=\mu^*(A)=\mu_*(A)$.
(ii) $\forall A\subseteq X$, ισχύει ότι $\mu_*(A)\leq\mu^*(A)$.

Πρόταση: Το inf στον ορισμό του μ^* είναι min, και το sup στον ορισμό του μ^* είναι max.

⚠ Αυτό σημαίνει πως: $\forall A\subseteq X$, υπάρχουν $B,C\in\mathcal{A}$ (δηλαδή "απλά", "καλά" σύνολα), ώστε

$$C\subseteq A\subseteq B \quad \text{και} \quad \mu^*(A)=\mu(B),\ \mu_*(A)=\mu(C).$$

Συγκεκριμένα:

> Αν $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, τότε $\exists\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, με $A \subseteq B$,
> ώστε $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Με άλλα λόγια:

> Αν $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, τότε $\lambda(A) = \min\{\lambda(B) : B \text{ Borel},\ B \supseteq A\}$.

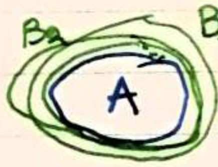
<u>Απόδειξη:</u> Έστω $A \subseteq X$. Εξ ορισμού,

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A},\ B \supseteq A\}.$$

Άρα, υπάρχει ακολουθία $(\mu(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$, με $\begin{cases} B_n \in \mathcal{A} \\ B_n \supseteq A \end{cases}$ $\forall n$, ώστε $\mu(B_n) \to \mu^*(A)$.

Άρα: $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{A}$,

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \supseteq A$,



και $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \mu^*(A)$:

- Αφού $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{A}$ και $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \supseteq A$, από τον ορισμό του $\mu^*(A)$ (μέσω ενός infimum) έχουμε:

$$\mu_*(A) \leq \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right).$$

- $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \le \mu(B_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$$\mu(B_n) \xrightarrow{n \to +\infty} \mu^*(A)$$

Άρα, $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \le \mu^*(A)$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη για το μ^*.
Για το μ_*:

Εξ ορισμού, $\mu_*(A) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{A},\ C \subseteq A\}$.

Άρα, υπάρχει ακολουθία $\left(\mu(C_n)\right)_{n=1}^{+\infty}$,

με $\begin{cases} C_n \in \mathcal{A} \\ C_n \subseteq A \end{cases} \forall n$, ώστε

$\mu(C_n) \to \mu_*(A)$. Τότε,

$$\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \in \mathcal{A}, \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \subseteq A}$$ και:

$$\mu_*(A) \underset{\left(\text{ορισμός του } \mu_*\right)}{\geq} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right) \geq \mu(C_n) \quad \forall n.$$

$$\mu(C_n) \xrightarrow{n \to +\infty} \mu_*(A)$$

Άρα, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \mu_*(A)$.

■

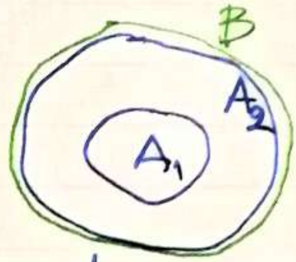
<u>Πρόταση:</u> Το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο:

<u>Απόδειξη:</u> • $\mu^*(\emptyset)=0$: $\quad \underbrace{\emptyset \subseteq \emptyset}_{\in\mathcal{A}} \Longrightarrow \mu^*(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0.$

• Αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, τότε $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$:

$\forall\, B \in \mathcal{A}$ με $B \supseteq A_2$,

έχουμε και ότι $B \supseteq A_1$.



Οπότε, $\mu^*(A_1) \underset{\substack{\text{ορισμός} \\ \text{του } \mu^*}}{\leq} \mu(B)$, $\forall\, B \in \mathcal{A}$ με $B \supseteq A_2$

$$\Longrightarrow \mu^*(A_1) \leq \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A},\ B \supseteq A_2\} = \mu^*(A_2).$$

Δηλ., το $\mu^*(A_1)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου του οποίου το <u>μέγιστο</u> κάτω φράγμα είναι το $\mu^*(A_2)$.

• Έστω $A_1, A_2, \ldots \subseteq X$.
ΘΔΟ $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\left\{\begin{matrix} B_n \in \mathcal{A} \\ B_n \supseteq A_n \end{matrix}\right\}$, ώστε $\mu^*(A_n) = \mu(B_n)$.

Άρα, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{A}$, και άρα

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

■

☆ **Πρόταση:** Αν $\mu^*(A) < +\infty$, τότε

$$A \in \mathcal{A}_\mu \iff \mu^*(A) = \mu_*(A)$$

δηλ. $\exists\, E, F \in \mathcal{A}$, με $E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$.

__Απόδειξη:__ ($\Longrightarrow$) Έστω $A \in \mathcal{A}_\mu$. Τότε, $\exists\, E, F \in \mathcal{A}$,

με $E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0 \longrightarrow \mu(F) = \mu(E)$

Οπότε, $\underbrace{\mu^*(A) \leq}_{A \subseteq F \in \mathcal{A}} \mu(F) = \underbrace{\mu(E) \leq}_{\mathcal{A} \ni E \subseteq A} \underbrace{\mu_*(A) \leq \mu^*(A)}_{\text{πάντα}}$

Άρα, όλα είναι ίσα σε αυτή την αλυσίδα

$\longrightarrow \mu^*(A) = \mu_*(A)$.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

Ξέρουμε ότι $\mu^*(A) = \mu(F)$, για κάποιο $F \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq F$,

και ότι $\mu_*(A) = \mu(E)$, για κάποιο $E \in \mathcal{A}$ με $E \subseteq A$.

Αφού $\mu^*(A) = \mu_*(A) < +\infty$, προκύπτει ότι $\mu(F) = \mu(E) < +\infty$.

Άρα, για αυτά τα $E, F \in \mathcal{A}$ έχουμε:

$E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) \underset{\substack{E \subseteq F \\ \mu(F) < +\infty}}{=} \mu(F) - \mu(E) = 0$.

Οπότε, $A \in \mathcal{A}_\mu$. ∎