Υπενθύμιση: Θέλουμε ΝΔΟ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda$,

δηλαδή ότι

$\lambda^*(A) = \lambda_*(A)$
$\nLeftarrow (\lambda^*(A) < +\infty)$

$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \Longleftrightarrow$ $\boxed{\exists\ E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \text{ με } E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \lambda(F \setminus E) = 0.}$

Έχουμε δείξει ότι:

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

(Άρα, απομένει ότι: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda$, δηλ. το $(\Longrightarrow)$).

- Αν $A \in \mathbb{R}^d$, τότε $\exists$ F Borel, $F \supseteq A$, με $\lambda(A) = \lambda(F)$

(επειδή: $\lambda(A) = \lambda^*(A) = \min\{\lambda(B) : B \text{ Borel}, B \supseteq A\}$).

Άρα, πρέπει να δειχθεί και ότι $\exists$ Borel E που προσεγγίζει καλά το A από μέσα, και ότι $\lambda(F \setminus E) = 0$

για κατάλληλα τέτοια Borel E, F.

Παρατηρούμε πως αυτή η ισότητα σημαίνει κάτι "δομικό" για το A.

→ Πρόταση: Αν $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, τότε $\lambda(A) = \lambda_*(A)$

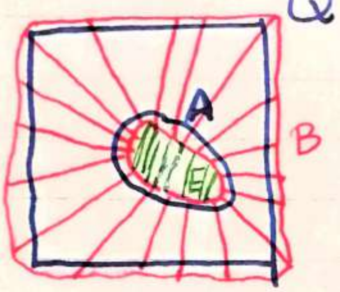
$(= \max\{\lambda(C) : C \text{ Borel}, C \subseteq A\})$.

Ισοδύναμα: Αν $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, τότε

$\exists$ E Borel, $E \subseteq A$, ώστε $\lambda(A) = \lambda(E)$.

Ιδέα: Προς το παρόν, γνωρίζουμε μόνο ότι τα σύνολα Lebesgue προσεγγίζονται καλά από μεγαλύτερα Borel.

Απόδειξη: • Αν A φραγμένο: Υπάρχει κύβος Q, με $A \subseteq Q$. Αφού $A, Q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, έχουμε: $Q \setminus A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ επίσης.



$$\boxed{\text{Άρα, } \exists\, B \text{ Borel, με } Q \setminus A \subseteq B, \text{ ώστε } \lambda(Q \setminus A) = \lambda(B).}$$

Τότε, το $E := Q \setminus B$ ικανοποιεί ότι:

- $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (αφού $Q, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$).
- $E \subseteq A$ $\left(Q \setminus A \subseteq B \Rightarrow \underbrace{Q \setminus B}_{= E} \subseteq A \right)$.
- $\lambda(E) = \lambda(A)$:

Ιδέα: Αφού το $Q \setminus A$ είναι πρακτικά το B, τότε το A είναι πρακτικά το $Q \setminus B =: E$.

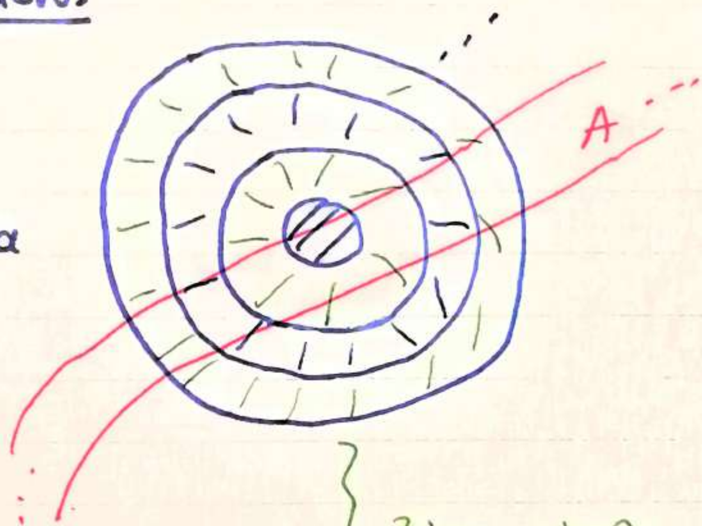
$E = Q \setminus B$, άρα

$$\lambda(E) = \lambda(Q \setminus B) = \lambda(Q) - \lambda(Q \cap B) \overset{\circledast}{=} \lambda(Q) - \lambda(Q \setminus A) \xrightarrow[\lambda(Q \setminus A) < +\infty]{Q \setminus A \subseteq Q} \lambda(A).$$

Για την $\circledast$, χρησιμοποιήσαμε ότι $\lambda(Q \cap B) = \lambda(Q \setminus A)$.
Πράγματι, $Q \setminus A \subseteq Q \cap B \subseteq B \Rightarrow \lambda(Q \setminus A) \leq \lambda(Q \cap B) \leq \lambda(B)$.
Όμως, $\lambda(Q \setminus A) = \lambda(B)$, άρα όλα τα παραπάνω μέτρα είναι ίσα.

• <u>Αν το A είναι μη φραγμένο:</u>

Γράφουμε τον $\mathbb{R}^d$ σαν ξένη ένωση από φραγμένα σύνολα της $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, ως εξής:



$$\left.\begin{array}{l} B_1 := B(0,1) \\ B_2 := B(0,2) \setminus B(0,1) \\ \vdots \\ B_n := B(0,n) \setminus B(0,n-1), \quad \forall n \geq 2. \end{array}\right\} \text{ξένα σύνολα.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, φραγμένο. Και:

$$\mathbb{R}^d = \coprod_{n=1}^{+\infty} B_n \implies A = \coprod_{n=1}^{+\infty} \overbrace{\underbrace{(B_n \cap A)}_{\substack{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \\ \text{φραγμένο}}}}^{\to \text{ξένα!}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \cap A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ και είναι φραγμένο

$\implies \exists\, E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, με $E_n \subseteq B_n \cap A$, ώστε $\lambda(E_n) = \lambda(B_n \cap A)$. Οπότε, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \subseteq A$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

και
$$\lambda(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(B_n \cap A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(E_n) \underset{\substack{\text{τα } E_n \text{ είναι} \\ \text{ξένα, καθώς κάθε} \\ E_n \subseteq B_n \cap A, \text{ και τα} \\ B_n \cap A \text{ είναι ξένα.}}}{=\!=\!=} \lambda\left(\coprod_{n=1}^{+\infty} E_n\right).$$

■

→ <u>Πόρισμα:</u> Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda^*(A) < +\infty$. Τότε:

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \longleftrightarrow A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda \left(\stackrel{\checkmark}{\longleftrightarrow} \lambda^*(A) = \lambda_*(A) \right)$$

έχει δειχθεί.

<u>Απόδειξη:</u> ($\Longleftarrow$) Ισχύει, αφού $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

($\Longrightarrow$) Έστω $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Δείξαμε μόλις ότι

$$\left(\lambda^*(A) = \right) \lambda(A) = \lambda_*(A)$$

$$\Rightarrow \lambda^*(A) = \lambda_*(A) \xrightarrow{\lambda^*(A) < +\infty} A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda .$$

■

⚠ Παρατηρούμε ήδη πως έχουμε δείξει ότι η $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ και η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda$ περιέχουν τα ίδια φραγμένα σύνολα.

→ <u>Θεώρημα:</u> $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda$.

<u>Απόδειξη:</u> • $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ✓ (έχει δειχθεί).

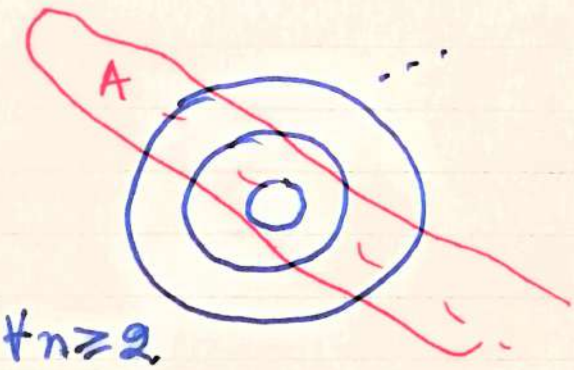
• $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda$: Έστω $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

⇝ Αν <u>A φραγμένο</u>, τότε $\lambda^*(A) = \lambda(A) < +\infty$.

Άρα, από το παραπάνω πόρισμα, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_\lambda$

✓

⇝ Αν το A είναι άφραχτο, τότε το σπάμε σε φραγμένα κομμάτια της $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$:



$B_1 := B(0,1)$

$B_2 := B(0,2) \setminus B(0,1)$

$\vdots$

$B_n := B(0,n) \setminus B(0,n-1) \quad \forall n \geq 2$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, φραγμένο

$\overset{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}{\Longrightarrow} A \cap B_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, φραγμένο $\Longrightarrow A \cap B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_{\lambda}$.

Άρα, $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \Longrightarrow A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(B_n \cap A)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_{\lambda}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)_{\lambda}$.

, που είναι σ-άλγεβρα

■

⚠ Μόλις δείξαμε ότι τα σύνολα Lebesgue είναι αυτά που προσεγγίζονται άριστα από Borel, άνω και κάτω.

Τώρα θα πάμε ένα βήμα πιο πέρα: Θα δείξουμε ότι είναι τα $\subseteq \mathbb{R}^d$ που διαφέρουν από σύνολα F_σ και G_δ κατά μέτρο 0 το πολύ.

Έχουμε ήδη δείξει ότι, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό}, U \supseteq A\}.$$

Άρα, αν $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, τότε

$$\lambda(A) = \underline{\inf}\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό}, U \supseteq A\}.$$

όχι αναγκαστικά min, άρα η προσέγγιση τυχαία μπορεί να έχει σφάλμα

<u>Πρόταση:</u> Έστω $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Τότε,

$$\lambda(A) = \underline{\sup}\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subseteq A\}$$

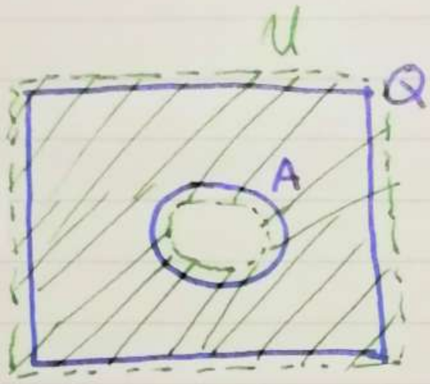
όχι αναγκαστικά max, άρα πάλι μπορεί να υπάρχουν σφάλματα στις προσεγγίσεις.

Το ότι το μέτρο Lebesgue ικανοποιεί αυτά τα δύο σημαίνει, όπως λέμε, ότι είναι "κανονικό μέτρο".

<u>Απόδειξη:</u> • Αν το <u>A είναι φραγμένο:</u>

Τότε, $\exists$ κύβος Q, κλειστός (και άρα συμπαγές σύνολο)

ώστε $A \subseteq Q$. Προφανώς, $\lambda(A) \geq$ από το supremum. Άρα, πρέπει να βρούμε συμπαγή $K \subseteq A$, με $\lambda(K)$ οσοδήποτε κοντά στο $\lambda(A)$ (για την ισότητα).



Ιδέα: Το $Q \setminus A$ προσεγγίζεται πολύ καλά από ένα λίγο μεγαλύτερο ανοιχτό U. Άρα, το A προσεγγίζεται πολύ καλά από το λίγο μικρότερο συμπαγές $Q \setminus U$.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Το $Q \setminus A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ και είναι φραγμένο, άρα $\lambda(Q \setminus A) \in \mathbb{R}$. Οπότε, το ότι

$$\lambda(Q \setminus A) = \inf \{ \lambda(U) : U \text{ ανοιχτό}, \ U \supseteq Q \setminus A \}$$

σημαίνει ότι υπάρχει ανοιχτό U, $U \supseteq Q \setminus A$, με

$$\Big(\lambda(Q \setminus A) \le \Big) \ \lambda(U) \le \lambda(Q \setminus A) + \varepsilon$$

↓ προφανές ↓ ενδιαφέρον

(δηλ., $|\lambda(U) - \lambda(Q \setminus A)| \le \varepsilon$)
(ή: $\lambda(U)$ "=" $\lambda(Q \setminus A)$ πρακτικά).

Τότε, το $K := Q \setminus U$ είναι συμπαγές (κλειστό, φραγμένο),

$K \subseteq A$ $\quad (Q \setminus A \subseteq U \Rightarrow Q \setminus U \subseteq A)$, και

πρακτικά, $\lambda(K)$ "=" $\lambda(A)$.

$|\lambda(K) - \lambda(A)| \le \varepsilon$: $\quad \lambda(K) \le \lambda(A)$ (αφού $K \subseteq A$),

και $\lambda(K) = \lambda(Q \setminus U) = \lambda(Q) - \lambda(Q \cap U)$

$$\overset{(*)}{\ge} \lambda(Q) - \big(\lambda(Q \setminus A) + \varepsilon \big) =$$

$$= \lambda(Q) - \lambda(Q\setminus A) - \varepsilon$$

$$= \lambda(A) - \varepsilon,$$

δηλ. $\lambda(A) - \varepsilon \leq \lambda(K) \leq \lambda(A)$,
άρα $|\lambda(K) - \lambda(A)| \leq \varepsilon$.

Για την ⊛ χρησιμοποιήσαμε ότι $\lambda(Q\cap U) \leq \lambda(Q\setminus A) + \varepsilon$:

$$Q\setminus A \subseteq Q\cap U \subseteq U \Rightarrow \lambda(Q\setminus A) \leq \lambda(Q\cap U) \leq \lambda(U).$$

Όμως, $\lambda(U) \leq \lambda(Q\setminus A) + \varepsilon$.

Άρα, $\lambda(Q\cap U) \leq \lambda(Q\setminus A) + \varepsilon$.

(δηλ., στην παραπάνω "αλυσίδα", ο πρώτος και ο τελευταίος όρος είναι περίπου ίσοι).

• <u>Αν το A είναι άφραχτο:</u>

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{B(0,n)}_{\substack{\text{αύξουσα}\\ \text{ακολουθία}\\ \text{στην } \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}}, \quad \text{άρα}$$

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(A\cap B(0,n)\right)}_{\text{αύξουσα ακολουθία στην } \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}. \quad \text{Άρα,}$$

$$\lambda(A) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(A\cap B(0,n)) \quad \left(\lim = \sup_n\right)$$

$$\overset{\substack{A\cap B(0,n)\\ \text{φραγμένο,}\\ \text{στην } \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}}{=} \sup_n \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subseteq A\cap B(0,n)\}$$

$\forall n,\quad \sup\{\lambda(K) : K$ συμπαγές, $K \subseteq A \cap B(0,n)\}$

$\leq \sup\{\lambda(K) : K$ συμπαγές, $K \subseteq A\}$.

Άρα, και το sup ως προς n, δηλ. το $\lambda(A)$, είναι $\leq \sup\{\lambda(K) : K$ συμπαγές, $K \subseteq A\}$.

Από την άλλη πλευρά, $\forall$ K συμπαγές $\subseteq A$ έχουμε $\lambda(K) \leq \lambda(A)$. Οπότε,

$$\lambda(A) \geq \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές},\ K \subseteq A\}.$$

Άρα, $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K$ συμπαγές, $K \subseteq A\}$.

■

→ **Πόρισμα:** Έστω $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Τότε :

$\lambda(G) = \lambda(A)$

(α) $\exists$ G_δ-σύνολο $G \supseteq A$, με $\lambda(G \setminus A) = 0$, και

(β) $\exists$ F_σ-σύνολο $F \subseteq A$, με $\lambda(A \setminus F) = 0$.

$\lambda(F) = \lambda(A)$

⚠ Αυτό μας λέει ότι ουσιαστικά τα Lebesgue-μετρήσιμα σύνολα είναι F_σ και G_δ. Συγκεκριμένα, είναι τα σύνολα που διαφέρουν από τα F_σ και τα G_δ κατά σύνολο μέτρου Lebesgue 0. Άρα, αν ένα $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$

είναι "περίπλοκο", αυτό οφείλεται αποκλειστικά σε κάποιο σύνολο μέτρου 0 μέσα στο A (καθώς το υπόλοιπο κομμάτι του A είναι F_σ, δηλαδή απλό).

<u>Απόδειξη</u>: • <u>Αν $\lambda(A) < +\infty$:</u>

Ξέρουμε ότι $\lambda(A) = \inf\{\lambda(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ ανοιχτό} \supseteq A\}$

$= \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές} \subseteq A\}$.

Άρα, υπάρχει ακολουθία $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{+\infty}$ ανοιχτών συνόλων $\mathcal{U}_n \supseteq A$ με $\lambda(\mathcal{U}_n) \to \lambda(A)$,

και υπάρχει ακολουθία $(K_n)_{n=1}^{+\infty}$ συμπαγών συνόλων $K_n \subseteq A$ με $\lambda(K_n) \to \lambda(A)$.

<u>Άρα:</u> $A \subseteq G := \underbrace{\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{U}_n}_{G_\delta\text{-σύνολο}}$,

και $\lambda(A) \leq \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{U}_n\right) \leq \lambda(\mathcal{U}_n) \quad \forall n$

$\lambda(A) \xrightarrow{n\to+\infty} \lambda(A)$, $\quad \lambda(\mathcal{U}_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \lambda(A)$

$\Rightarrow \lambda\Big(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{U}_n}_{= G}\Big) = \lambda(A) \xrightarrow[A \subseteq G]{\lambda(A) < +\infty} \lambda(G \setminus A) = \lambda(G) - \lambda(A) = 0.$

Επίσης: $A \supseteq F := \underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n}_{F_\sigma\text{-σύνολο}}$,

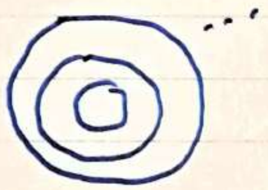
$\forall n,$

και $$\lambda(K_n) \le \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n\Big) \le \lambda(A)$$

$$\lambda(K_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \lambda(A), \qquad \lambda(A) \xrightarrow{n\to+\infty} \lambda(A)$$

$$\Rightarrow \lambda\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n}_{=F}\Big) = \lambda(A) \xrightarrow[F\subseteq A]{\lambda(A)<+\infty} \lambda(A\setminus F) = \lambda(A)-\lambda(F) = 0.$$

- <u>Αν $\lambda(A)=+\infty$:</u> Ορίζουμε



$B_1 := B(0,1)$,

$B_n := B(0,n)\setminus B(0,n-1) \quad \forall n\ge 2.$

Τότε, $\mathbb{R}^d = \coprod_{n=1}^{+\infty} B_n$

$$\Rightarrow \quad A = \coprod_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(A\cap B_n)}_{\text{ξένα, στην } \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}.$$

Κάθε $A\cap B_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ και είναι φραγμένο

$\Rightarrow \exists$ G_δ-σύνολο G_n και F_σ σύνολο F_n,

ώστε $F_n \subseteq A\cap B_n \subseteq G_n$,

$\lambda(G_n \setminus F_n) = 0$,

$$\underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n}_{\substack{\| \\ F,\ F_\sigma\text{-σύνολο}}} \subseteq A \subseteq \underbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n}_{\substack{\| \\ G,\ G_\delta\text{-σύνολο (άσκηση)}}} ,$$

και

$$\lambda(\underbrace{G \setminus F}_{\substack{\| \\ \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) \\ \subseteq \\ \bigcup_{n=1}^{+\infty}(G_n \setminus F_n)}}) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(G_n \setminus F_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\lambda(G_n \setminus F_n)}_{\substack{\| \\ 0}} = 0.$$

■

Τέλος, δείχνουμε ότι το μέτρο Lebesgue είναι το μοναδικό μέτρο στη $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ που αποδίδει το σωστό όγκο σε κάθε διάστημα:

→ Πρόταση: Από όλα τα μέτρα $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$, το μέτρο Lebesgue είναι το μοναδικό με την ιδιότητα ότι

$$\boxed{\mu(I) = v(I) \quad \forall \text{ φραγμένο διάστημα } I \subseteq \mathbb{R}^d.}$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω μ ένα τέτοιο μέτρο πάνω στη $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Τότε, αν

$\Delta :=$ η οικογένεια των φραγμένων διαστημάτων στον $\mathbb{R}^d$,

έχουμε ότι

$$\mu(I) = \lambda(I) \quad \forall\, I \in \Delta.$$

Επίσης,

- η Δ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές,
- $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n,n]^d$, όπου $\left([-n,n]^d\right)_{n=1}^{+\infty}$

είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της Δ και $\mu\left([-n,n]^d\right) \left(= \lambda\left([-n,n]^d\right)\right) = (2n)^d < +\infty$.

Άρα, $\mu(A) = \lambda(A) \quad \forall\, A \in \sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

$\blacksquare$