→ <u>Ασκήσεις</u> (Κεφάλαια 3 & 4):

(3.5) ΝΔΟ κάθε ευθεία και κάθε κύκλος στον $\mathbb{R}^2$ έχει μέτρο Lebesgue (λ_2) ίσο με μηδέν.

<u>Λύση:</u> Θα δείξουμε την εξής πιο γενική πρόταση:

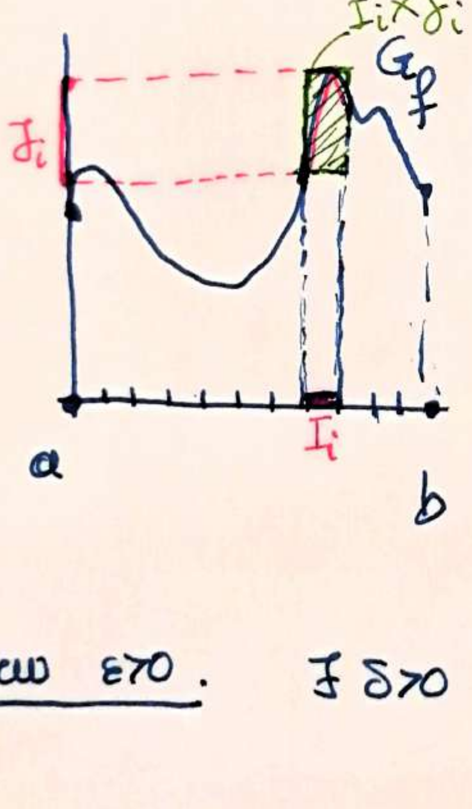
“Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε $\lambda(G_f)=0$.

(λ_2)

Εδώ, $G_f := \{(x,f(x)) : x\in[a,b]\}$, το γράφημα της f.”

[Αυτό εύκολα συνεπάγεται τον ισχυρισμό της (3.5), καθώς κάθε (μη κατακόρυφη) ευθεία είναι αριθμήσιμη ένωση τέτοιων γραφημάτων, και κάθε κύκλος είναι ένωση δύο τέτοιων γραφημάτων.
Η περίπτωση κατακόρυφης ευθείας είναι επίσης απλή (άσκηση).]

Έστω λοιπόν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής.



Για να υπολογίσουμε το $\lambda_2(G_f)$, πρέπει να καλύψουμε το G_f με διδιάστατα ορθογώνια.

Η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, και άρα ομοιόμορφα συνεχής. Άρα:

Έστω $\varepsilon>0$. $\exists\, \delta>0$ ώστε: $\forall\, x,y\in[a,b]$ με $|x-y|<\delta$, έχουμε: $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, δηλ.:

όταν τα x,y ανήκουν σε ένα διάστημα μήκους $<\delta$, — στον $x'x$

τότε τα $f(x), f(y)$ ——— // ——— $<\varepsilon$. — στον $y'y$

Οπότε, καλύπτουμε το $[a,b]$ με διαδοχικά κλειστά διαστήματα, $I_1,\dots,I_n$, μήκους $<\delta$.

$\forall i = 1, \dots, n$, αφού η $f : I_i \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και το I_i είναι <u>κλειστό διάστημα</u>, έχουμε:

$$f(I_i) = [\underbrace{\min f(I_i)}_{= \min_{x \in I_i} f(x)}, \underbrace{\max f(I_i)}_{= \max_{x\in I_i} f(x)}] =: J_i$$, κλειστό διάστημα,

και άρα $G_i := \{ (x, f(x)) : x \in I_i \} \subseteq \underbrace{I_i \times J_i}_{\text{κλειστό}}$

το κομμάτι του G_f πάνω από το I_i

διάστημα

Επίσης, αφού το I_i έχει μήκος $< \delta$,

το $\min_{x \in I_i} f(x)$ $(= f(x_1)$, για κάποιο $x_1 \in I_i)$

και το $\max_{x \in I_i} f(x)$ $(= f(x_2)$, για κάποιο $x_2 \in I_i)$

απέχουν κατά $< \varepsilon$ $\quad (|x_1 - x_2| < \delta$, άρα $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$.

Άρα, $\boxed{\lambda(J_i) < \varepsilon, \quad \forall i = 1, \dots, n}$

Οπότε, $G_f = \bigcup_{i=1}^{n} G_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i \times J_i$

Καλύψαμε το G_i με πολλά διαδιάστατα ορθογώνια, που όμως έχουν <u>πολύ</u> μικρό ύψος $(< \varepsilon)$.

G_f

Άρα, $\lambda_2^*(G_f) \le \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_2^*(I_i \times J_i)}$

$= \lambda_2(I_i \times J_i)$

$= \lambda_1(I_i)\ \lambda_1(J_i)$

$< \lambda_1(I_i) \cdot \varepsilon$.

Οπότε:

$$\lambda_2^*(G_f) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_1(I_i)\cdot\varepsilon$$

$$= \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_1(I_i)}_{''}$$

μήκος του διαστήματος I_i (= διαφορά άκρων).

$$= \varepsilon \cdot (b-a).$$

τα I_i είναι διαδοχικά και καλύπτουν το $[a,b]$

Αυτό ισχύει $\forall \varepsilon>0$, άρα $\lambda_2^*(G_f)=0$.

Δείξαμε (όταν ασχολούμασταν με το κριτήριο του Καραθεοδωρή) ότι αν $\mu^*(A)=0$ τότε $A\in\mathcal{M}_{\mu^*}$, δηλ. το A είναι μ^*-μετρήσιμο.

Οπότε, κάθε σύνολο με εξωτερικό μέτρο Lebesgue 0 στον $\mathbb{R}^2$ είναι Lebesgue-μετρήσιμο (και φυσικά έχει μέτρο Lebesgue 0).

Άρα, $G_f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, και $\lambda_2(G_f) = \lambda_2^*(G_f)=0$.

(3.6) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ Lebesgue-μετρήσιμο, με $0<\lambda(A)<+\infty$.

ΝΔΟ $\exists$ Lebesgue-μετρήσιμο $F\subseteq A$, με $\lambda(F)=\dfrac{\lambda(A)}{2}$.

Λύση: Ορίζουμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με

$$f(x)=\underbrace{\lambda\big(A\cap(-\infty,x]\big)}_{\substack{\text{ορίζεται καλά,}\\ \text{αφού } A,\ (-\infty,x]\in\mathcal{L}(\mathbb{R})\\ \Rightarrow A\cap(-\infty,x]\in\mathcal{L}(\mathbb{R}).}} \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

ΘΔΟ $\exists\, x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=\dfrac{\lambda(A)}{2}$. Αυτό θα τελειώσει τη λύση.

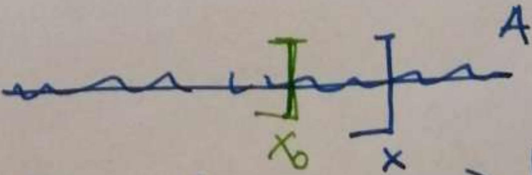
ΘΔΟ η f είναι συνεχής, και άρα για ΝΔΟ $\exists\, x_0\in\mathbb{R}$ με $f(x_0)=\dfrac{\lambda(A)}{2}$, αρκεί ΝΔΟ $\exists\, x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$f(x_1)<\dfrac{\lambda(A)}{2}$, $\quad f(x_2)>\dfrac{\lambda(A)}{2}$. Αυτά υπάρχουν

επειδή $\underbrace{\lim_{x\to-\infty} f(x)=0}_{<\frac{\lambda(A)}{2}}$, $\quad \underbrace{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lambda(A)}_{>\frac{\lambda(A)}{2}}$

Σχέδιο

• Η f είναι συνεχής: Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon>0$.

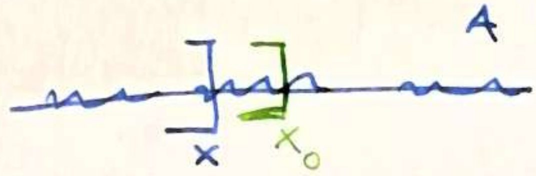


⇝ $\forall x\in\mathbb{R}$ με $x\geq x_0$:

$$|f(x)-f(x_0)| = \Big|\underbrace{\lambda\big(A\cap(-\infty,x]\big)-\lambda\big(A\cap(-\infty,x_0]\big)}_{=\ \lambda(A\cap(x_0,x])}\Big|$$

$$=\lambda\big(A\cap(x_0,x]\big)\leq\lambda\big((x_0,x]\big)=x-x_0=|x-x_0|.$$

$\rightsquigarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ με $x < x_0$:



$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \lambda\big(A \cap (-\infty, x]\big) - \lambda\big(A \cap (-\infty, x_0]\big) \right|$$
$$= \lambda\big(A \cap (-\infty, x_0]\big) - \lambda\big(A \cap (-\infty, x]\big)$$
$$= \lambda\big(A \cap (x, x_0]\big) \leq \lambda\big((x, x_0]\big) =$$
$$= x_0 - x = |x - x_0|.$$

Οπότε, $\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \varepsilon$, έχουμε
$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

Άρα, η F είναι συνεχής (μάλιστα δείξαμε ότι είναι Lipschitz-συνεχής. Όχι ότι μας χρειάζεται...)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lambda(A)$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$:

Εδώ βοηθάει ότι η F είναι αύξουσα (απλό).

Άρα, αυτά τα όρια υπάρχουν, και μάλιστα:

$$\rightsquigarrow \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{n \to +\infty} F(n) = \lim_{n \to +\infty} \lambda\big(A \cap (-\infty, n]\big)$$
$$\underset{\substack{(A \cap (-\infty, n])_n \\ \text{αύξουσα}}}{=} \lambda\Big(\overbrace{\bigcup_{n=1}^{+\infty} \big(A \cap (-\infty, n]\big)}^{=A} \Big)$$
$$= \lambda(A).$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to-\infty} F(n) = \lim_{n\to-\infty} \lambda\big(A\cap(-\infty,n]\big)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \lambda\big(A\cap(-\infty,-n]\big)$$

$\big(A\cap(-\infty,-n]\big)_n$ φθίνουσα, $\lambda\big(A\cap(-\infty,-1]\big) \leq \lambda(A) < +\infty$

$$= \lambda\Big(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{+\infty}\big(A\cap(-\infty,-n]\big)}_{=\emptyset}\Big),$$

αφού περιέχεται στην $\bigcap_{n=1}^{+\infty}(-\infty,-n]$, που είναι κενή.

$$= \lambda(\emptyset) = 0.$$

Αφού $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, $\exists\, x_1\in\mathbb{R}$ ώστε $F(x_1) > \underbrace{\boxed{\frac{\lambda(A)}{2}}}_{<+\infty}$

Αφού $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\exists\, x_2\in\mathbb{R}$ ώστε $F(x_2) < \underbrace{\boxed{\frac{\lambda(A)}{2}}}_{>0}$

Από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για τη συνεχή F, υπάρχει x_0 μεταξύ των x_1, x_2 (και άρα στο $\mathbb{R}$) ώστε $F(x_0) = \frac{\lambda(A)}{2}$. Άρα, το $F = A\cap(-\infty,x_0]$ ικανοποιεί αυτό που θέλαμε. ■

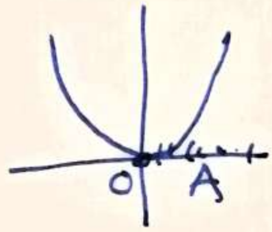
Ασκήσεις:

3.10 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A)=0$. ΝΔΟ το
$B := \{x^2 : x \in A\}$ έχει μέτρο Lebesgue 0.

Λύση: ⚠ $B \subseteq \mathbb{R}$, άρα καταλαβαίνουμε πως η άσκηση αναφέρεται στο λ_1.

⚠ Δεν ξέρουμε αν $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, οπότε πρώτα δείχνουμε ότι $\lambda^*(B)=0$ (και άρα $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$).

- Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \subseteq [0,+\infty)$ (για το
$\tilde{A} = \{x \in A : x<0\}$,
λειτουργούμε με το $-\tilde{A} \subseteq [0,+\infty)$).



- Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A είναι φραγμένο (αλλιώς το σπάμε σε φραγμένα υποσύνολα).
Άρα, $A \subseteq [a,b]$, για κάποια $a<b$ στο $\mathbb{R}$.

- Αφού $\lambda(A)=0$, $\exists$ κάλυψη $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n,b_n)$
με $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n)<\varepsilon$.

Αφού επίσης $A \subseteq [a,b]$, έχουμε:

$$A \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n,b_n)\right) \cap [a,b] = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\Big(\underbrace{(a_n,b_n)\cap[a,b]}_{=: I_n}\Big)$$

, όπου

κάθε I_n είναι διάστημα μέσα στο $[a,b]$.
(ίσως όχι ανοιχτό)

Και: $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(I_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \Rightarrow \underbrace{\{x^2 : x \in A\}}_{B} \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} J_n,$$

όπου $J_n := \{x^2 : x \in I_n\}$.

Συγκεκριμένα, αφού η x^2 είναι γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και συνεχής, έχουμε ότι:

Αν $\begin{cases} I_n = (x_n, y_n) \\ I_n = [x_n, y_n) \\ I_n = (x_n, y_n] \\ I_n = [x_n, y_n] \end{cases}$ τότε $\begin{cases} J_n = (x_n^2, y_n^2) \\ J_n = [x_n^2, y_n^2) \\ J_n = (x_n^2, y_n^2] \\ J_n = [x_n^2, y_n^2] \end{cases}$,

αντίστοιχα. Οπότε,

$$\lambda^*(B) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(J_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (y_n^2 - x_n^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (y_n - x_n) \cdot \underbrace{(y_n + x_n)}_{\substack{\leq 2b, \text{ αφού} \\ [x_n, y_n] \subseteq [0,b]}}$$

$$\leq 2b \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (y_n - x_n) = 2b \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(I_n)$$

$$< 2b \cdot \varepsilon.$$

Άρα, $\forall \varepsilon > 0$, $\lambda^*(B) < 2b \cdot \varepsilon$. Άρα, $\lambda^*(B) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ και $\lambda(B) = 0$. ∎

⚠ Στην ουσία χρησιμοποιήσαμε ότι η x^2 είναι Lipschitz-συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα. Λύνουμε λοιπόν με παρόμοιο τρόπο την εξής πιο γενική άσκηση:

<u>Άσκηση:</u> Έστω $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ Lipschitz-συνεχής.

Τότε, $\forall\ A\subseteq[a,b]$ με $\lambda(A)=0$

έχουμε ότι: $\lambda\big(f(A)\big)=0$.

<u>Λύση:</u> $\lambda(A)=0 \rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, υπάρχει κάλυψη $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n,b_n)$

με $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n)<\varepsilon$.

Άρα,
$$A\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n,b_n)\right)\cap[a,b]$$
$$=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\underbrace{(a_n,b_n)\cap[a,b]}_{I_n}$$

I_n, διάστημα $\subseteq[a,b]$ και $\subseteq(a_n,b_n)$.

Οπότε,
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^*(I_n)\leq\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-a_n)<\varepsilon.$$

Ξέρουμε ότι υπάρχει $M>0$ ώστε:
$$|f(x)-f(y)|\leq M\cdot|x-y|,\quad\forall x,y \text{ στο } [a,b].$$

Άρα, το $f(I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους

$\leq M \cdot \lambda^*(I_n)$. Επομένως,

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \longrightarrow f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} f(I_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} J_n,$$

όπου $$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(J_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} M \cdot \lambda^*(I_n) \leq M \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(I_n)$$
$$< M \cdot \varepsilon.$$

Άρα, $$\underbrace{\lambda^*(f(A)) \leq}_{\text{υποπροσθετικότητα}} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^*(J_n) < M \cdot \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda^*(f(A)) = 0$$

Άρα, $f(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ και $\lambda(f(A)) = 0$.

■

(3.18) Έστω $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μία αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

$\forall \varepsilon > 0$, έστω $$A(\varepsilon) := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Θέλουμε να μελετήσουμε την τομή των $A(\varepsilon)$ καθώς $\varepsilon \to 0$. Οπότε, ας ορίσουμε

$$A := \bigcap_{m=1}^{+\infty} A\left(\frac{1}{m}\right).$$

Προφανώς $\mathbb{Q} \subseteq A$. Θέλουμε να δούμε πόσο τα $\mathbb{Q}$, A διαφέρουν.

(α) $\lambda(A(\varepsilon)) \le 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

(β) Αν $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, τότε $[0,1] \setminus A(\varepsilon) \neq \emptyset$.

(γ) $\mathbb{Q} \subsetneq A$. Συγκεκριμένα, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Λύση: (α) Το $A(\varepsilon)$ είναι ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}$, άρα ανήκει στη $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, και άρα στη $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

(Οπότε μπορούμε να μιλήσουμε για το $\lambda(A(\varepsilon))$.)

Και: $$\lambda(A(\varepsilon)) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda\left(\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2\varepsilon.$$

(β) $\lambda([0,1] \setminus A(\varepsilon)) > 0$, επειδή

$$\lambda([0,1] \setminus A(\varepsilon)) = \lambda([0,1]) - \underbrace{\lambda([0,1] \cap A(\varepsilon))}_{\le \lambda(A(\varepsilon))}$$

$$\ge \lambda([0,1]) - \lambda(A(\varepsilon))$$

$$= 1 - \underbrace{\lambda(A(\varepsilon))}_{\le 2\varepsilon}$$

$$\ge 1 - 2\varepsilon \underset{\varepsilon < \frac{1}{2}}{>} 0.$$ Άρα, $[0,1] \setminus A(\varepsilon) \neq \emptyset$.

(γ) • Το A είναι G_δ σύνολο, ως τομή των ανοιχτών $A(\frac{1}{m})$, $m=1,2,3,\dots$

• Το A είναι πυκνό στο $[0,1]$, καθώς περιέχει το $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ που είναι πυκνό στο $[0,1]$.

Αφού ο $([0,1], |\cdot|)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, από το Θεώρημα του Baire προκύπτει ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο. Πράγματι,

κάθε $B\subseteq\mathbb{R}$ που είναι G_δ και πυκνό στο $[0,1]$ είναι υπεραριθμήσιμο:

Έστω $B=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\underbrace{G_n}_{\text{ανοιχτά } \subseteq\mathbb{R}}$, B πυκνό στο $[0,1]$, με $B=\{b_1,b_2,b_3,\dots\}$ (αριθμήσιμο).

Παίρνουμε άτοπο ως εξής:

$\forall n\in\mathbb{N}$, το $U_n=G_n\setminus\{b_n\}$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$ και πυκνό στο $[0,1]$ (καθώς το G_n είναι πυκνό στο $[0,1]$), άρα από Baire:

$\bigcap_{n=1}^{+\infty}U_n$ είναι πυκνό στο $[0,1]$.

Όμως, αφού $\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n = B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$,

προκύπτει ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n \setminus \{b_n\} = \emptyset$,

που δεν είναι πυκνό το $[0,1]$ $\longrightarrow$ άτοπο.

Οπότε, το A είναι υπεραριθμήσιμο, και άρα

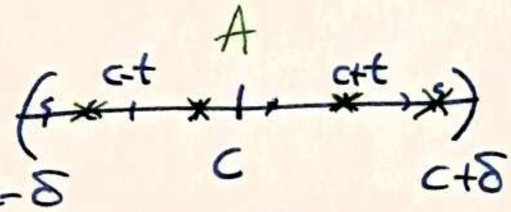
$\mathbb{Q} \subsetneq A$.

■

(4.4) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

Έστω ότι, $\forall\, t \in (-\delta, \delta)$,

είτε $c - t \in A$ είτε $c + t \in A$.



ΝΔΟ $\lambda^*(A) \geq \delta$.

Λύση: Έστω $T_1 := \{t \in (-\delta, \delta) : \overbrace{c - t \in A}^{\Leftrightarrow\, t \in c - A}\}$

$= (-\delta, \delta) \cap (c - A)$,

$T_2 := \{t \in (-\delta, \delta) : \underbrace{c + t \in A}_{\Leftrightarrow\, t \in A - c}\}$

$= (-\delta, \delta) \cap (A - c)$.

Από την υπόθεση,

$$(-\delta,\delta) = T_1 \cup T_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda^*\big((-\delta,\delta)\big)}_{2\delta} \leq \lambda^*(T_1) + \lambda^*(T_2)$$

$$\leq \lambda(c-A) + \lambda(A-c)$$

$T_1 \subseteq c-A$, $T_2 \subseteq A-c$

$$= \lambda(-A) + \lambda(A)$$

$$= 2\lambda(A)$$

Άρα, $2\delta \leq 2\lambda(A) \longrightarrow \delta \leq \lambda(A)$.

■

(4.6) Έστω $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

(α) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (I_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία ανοιχτών διαστημάτων με $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \supseteq A$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon$.

(β) Αν $I_1, \ldots, I_m$ είναι ανοιχτά διαστήματα με $I_1 \cup \ldots \cup I_m \supseteq A$, τότε $\lambda(I_1) + \ldots + \lambda(I_m) \geq 1$.

⚠ Άρα, χρησιμοποιώντας άπειρα διαστήματα, με υπερβολικά μικρό μήκος, μπορούμε να προσεγγίσουμε καλά το A.

Αν όμως επιμένουμε να προσεγγίζουμε με πεπερασμένα το πλήθος διαστήματα, τότε αυτά αναγκαστικά θα είναι εν γένει μεγάλα, και το A δε θα προσεγγίζεται καλά.

<u>Λύση:</u> (α) Άμεσο από το ότι $\lambda(\mathbb{Q}\cap[0,1])=0$.

(β) Αν $\quad A \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_m$

$$\longrightarrow \underbrace{\overline{A}}_{\substack{\| \\ [0,1]}} \subseteq \overline{I}_1 \cup \dots \cup \overline{I}_m,$$ (δεν ισχύει αυτό για άπειρη ένωση!)

άρα $$\boxed{\overline{I}_1 \cup \dots \cup \overline{I}_m \supseteq [0,1]} \quad (*)$$

Κάθε I_i είναι ένα ανοικτό διάστημα (a_i,b_i)

$\Rightarrow \overline{I}_i = [a_i, b_i]$, και έχει το <u>ίδιο</u> μήκος με το I_i.

Οπότε, από την $(*)$,

$$1 = \lambda([0,1]) \leq \lambda(\overline{I}_1) + \dots + \lambda(\overline{I}_m)$$
$$= \lambda(I_1) + \dots + \lambda(I_m).$$

■

4.8 Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, Lipschitz σε κάθε $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$.

(α) Η f απεικονίζει σύνολα μέτρου Lebesgue 0 σε σύνολα μέτρου Lebesgue 0.

(β) Η f απεικονίζει Lebesgue-μετρήσιμα σε Lebesgue-μετρήσιμα (σύνολα).

<u>Λύση:</u> (α) Το δείξαμε μετά την άσκηση 3.10 για φραγμένα $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)=0$. Εύκολα αυτό γενικεύεται και για μη φραγμένα.

(β) Έστω $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Τότε, $A=F\cup N$, όπου το F είναι F_σ και $\lambda(N)=0$.

Άρα, $f(A)=f(F)\cup f(N)$, όπου το $f(N)$ έχει μέτρο Lebesgue 0 (από το (α)).

Αν δείξουμε τώρα ότι το $f(F)$ είναι F_σ, θα έχουμε τελειώσει. Και πράγματι αυτό ισχύει:

(*) Κάθε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής απεικονίζει σύνολα F_σ σε σύνολα F_σ.

<u>Απόδειξη της (*)</u>: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Τότε, η f απεικονίζει συμπαγή σε συμπαγή.

Τώρα, έστω F σύνολο F_σ. Παρατηρούμε

ότι το F είναι αριθμήσιμη ένωση συμπαγών:

$$F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{F_n}_{\text{κλειστό}} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{m=1}^{+\infty} \underbrace{\overbrace{F_n \cap [-m,m]}^{=K_n}}_{\substack{\text{κλειστό + φραγμένο,} \\ \text{άρα συμπαγές}}}$$

$$= \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} K_n \text{ , αριθμήσιμη ένωση συμπαγών.}$$

Άρα, $f(F) = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \underbrace{f(K_n)}_{\substack{\text{συμπαγές} \\ \Rightarrow \text{κλειστό}}}$, F_σ σύνολο.

■

(4.11) Έστω C το σύνολο Cantor. ΝΔΟ

<u>Παρ/σα</u> $\lambda(C)=0$ → $C-C=[-1,1]$ και $C+C=[0,2]$

(δηλ., τα $C-C$ και $C+C$ είναι δύο μεγαλύτερα γίνεται).

⚠ Αυτό σημαίνει πως το αντίστροφο του Θεωρήματος του Steinhaus <u>δεν</u> ισχύει. Μπορεί το $A-A$ να είναι μεγάλο, <u>χωρίς</u> το A να είναι μεγάλο.

<u>Λύση:</u> $C = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n}{3^n} : \quad t_n = 0 \text{ ή } 2,\ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$

$\boxed{C+C = [0,2]}$: $C+C \subseteq [0,2]$
(αφού $C \subseteq [0,1]$).

Άρα, αρκεί ΝΔΟ $[0,2] \subseteq C+C$. Και όντως:

Έστω $z \in [0,2] \rightarrow \frac{z}{2} \in [0,1]$

$$\Rightarrow \frac{z}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{3^n}$$, όπου κάθε $\gamma_n \in \{0,1,2\}$

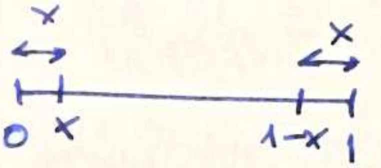
$$\Rightarrow z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\gamma_n}{3^n}$$, όπου κάθε $\gamma_n \in \{0,2,4\}$.

Παρατηρούμε ότι $\forall n$ υπάρχουν $a_n, b_n \in \{0,2\}$ ώστε $2\gamma_n = a_n + b_n$. Πράγματι:

- αν $2\gamma_n = 0$, αφού $0=0+0$, θέτουμε $a_n = b_n = 0$.
- αν $2\gamma_n = 2$, αφού $2 = 0+2$, θέτουμε $a_n = 0$, $b_n = 2$.
- αν $2\gamma_n = 4$, αφού $4 = 2+2$, θέτουμε $a_n = b_n = 2$

Άρα, $z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n + b_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{3^n} \in C+C.$

$\longrightarrow$ $\boxed{C-C=[-1,1]}$:



Παρατηρούμε ότι

$x\in C \iff 1-x \in C$

(καθώς το C είναι συμμετρικό ως προς το $\frac{1}{2}$).

Άρα, $C-C = \{x-y : x,y\in C\}$

$$= \{x-(1-z) : x,z\in C\}$$

$$= \{x+z-1 : x,z\in C\}$$

$$= C+C-1 = [0,2]-1 = [-1,1].$$

■

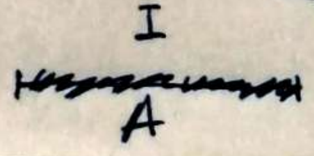
(4.16) (β) Έστω A Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0<\lambda(A)<+\infty$.

ΝΔΟ, $\forall \kappa\in\mathbb{N}$, το A περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους κ.

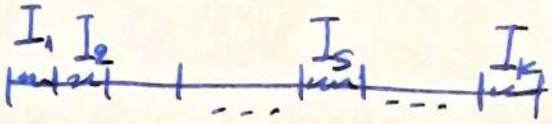
Λύση: • Βρίσκουμε I διάστημα του οποίου μεγάλο ποσοστό καλύπτεται από το A.

Συγκεκριμένα, θέλουμε $\lambda(A\cap I) > \frac{k-1}{k}\cdot\lambda(I)$.

(Άσκηση).



- Κόβουμε το I σε k διαδοχικά διαστήματα $I_1, \dots, I_k$, ίσου μήκους $\frac{\lambda(I)}{k}$



- Μεταφέρουμε κάθε I_s ώστε το αριστερό του άκρο να ταυτιστεί με το αριστερό άκρο του I_1. Έτσι, μεταφέρεται αντίστοιχα και το $A \cap I_s$ (που εν γένει πρέπει να είναι μεγάλο) μέσα στο I_1, $\forall s = 2, \dots, k$.

Δηλαδή: $\forall s = 2, \dots, k$,

ορίζουμε $B_s := A \cap I_s - \underbrace{(s-1) \cdot \frac{\lambda(I)}{k}}_{\text{σταθερά}} \quad (\subseteq I_1)$.

Επίσης: $B_1 := A \cap I_1$.

- Δείχνουμε ότι $\bigcap_{s=1}^{k} B_s \neq \phi$. [Τότε τελειώσαμε:

$\exists\, x \in B_s = A \cap I_s - (s-1)\frac{\lambda(I)}{k} \quad \forall s = 1, \dots, k$,

και άρα $x \in B_1 = A \cap I_1 \subseteq A$,

και $\forall s = 2, \dots, k \quad \exists\, x_s \in A \cap I_s \subseteq A$ ώστε

$x = x_s - (s-1)\frac{\lambda(I)}{k} \Rightarrow$ το $x_s = x + (s-1)\frac{\lambda(I)}{k}$

ανήκει στο A, $\forall s=2,\dots,k-1$. Δηλαδή,

τα $x, x+\frac{\lambda(I)}{k}, x+2\cdot\frac{\lambda(I)}{k}, \dots, x+\frac{k-1}{k}\cdot\lambda(I)$

ανήκουν στο A. Φυσικά αποτελούν αριθμητική πρόοδο μήκους k.]

$\bigcap_{s=1}^{k} B_s \neq \emptyset$: $\quad \lambda\Big(I_1 \setminus \overbrace{\bigcap_{s=1}^{k} B_s}^{\subseteq I_1}\Big) =$

$$= \lambda\Big(\bigcup_{s=1}^{k}(I_1 \setminus B_s)\Big)$$

$$= \lambda\Big(\bigcup_{s=1}^{k}\Big(I_1 \setminus \Big[A\cap I_s - (s-1)\cdot\frac{\lambda(I)}{k}\Big]\Big)\Big)$$

<= Σ_s λ(...) = Σ_s λ(... + (s-1)λ(I)/κ)

$$= \lambda\Big(\bigcup_{s=1}^{k}\Big(\underbrace{\Big[(s-1)\frac{\lambda(I)}{k} + I_1\Big]}_{\overset{\shortparallel}{I_s}} \setminus A\cap I_s\Big)\Big)$$

$$= \lambda\Big(\underbrace{\bigcup_{s=1}^{k}\big(I_s \setminus (A\cap I_s)\big)}_{\overset{\shortparallel}{I\setminus A}}\Big) = \lambda(I\setminus A) = \lambda(I) - \lambda(A)$$

$$< \lambda(I) - \frac{k-1}{k}\lambda(I)$$

$$= \frac{1}{k}\lambda(I) = \lambda(I_1).$$

Άρα, $\lambda\Big(I_1 \setminus \overbrace{\bigcap_{s=1}^{k} B_s}^{\subseteq I_1}\Big) \underset{\neq}{<} \lambda(I_1) \Rightarrow \lambda\Big(\bigcap_{s=1}^{k} B_s\Big) > 0$. ∎