→ **Πόσο μεγάλη είναι η $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ σε σχέση με τα $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ και $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$??**

Πρώτον, δείχνουμε ότι δεν είναι όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ Lebesgue-μετρήσιμα. Θα δούμε αργότερα και μία άλλη απόδειξη που θα μας προσφέρει περισσότερα - προς το παρόν ουσιαστικά επαναλαμβάνουμε την κατασκευή του Vitali που είδαμε την Εβδομάδα 1:

→ <u>Πρόταση:</u> Υπάρχει $N \subseteq \mathbb{R}^d$ που δεν είναι Lebesgue-μετρήσιμο. (Δηλ., αυτό το N δεν έχει καλά ορισμένο όγκο)

(α' τρόπος)
<u>Απόδειξη:</u> Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0,1)^d$ ως εξής:

$$x \sim y \overset{}{\underset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow}} x-y \in \mathbb{Q}^d, \text{ δηλ. } y \in x+\mathbb{Q}^d.$$

Δημιουργούμε ένα σύνολο $N \subseteq [0,1)^d$, που περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισοδυναμίας (οι κλάσεις αυτές είναι υπεραριθμήσιμες, άρα χρειαζόμαστε το αξίωμα της επιλογής για να δημιουργήσουμε το N).

Τότε, το $\lambda(N)$ δεν υπάρχει (και άρα $N \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$):

Έστω ότι το $\lambda(N)$ υπάρχει. Ισχύει ότι:

$$[0,1)^d \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^d \cap (-1,1)^d} (x+N) \subseteq [-1,2)^d$$

και τα $x+N$, $x \in \mathbb{Q}^d \cap (-1,1)^d$,

είναι ξένα ανά δύο (όπως την Εβδομάδα 1).

Άρα, αν $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, τότε

$$\bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)^d} (x+N) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \quad \text{και}$$

$$\lambda\Big(\bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)^d} (x+N)\Big) = \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)^d} \lambda(x+N) = \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)^d} \lambda(N)$$

$= 0$, αν $\lambda(N)=0$ $= +\infty$, αν $\lambda(N)>0$

Κανένα όμως δεν μπορεί να ισχύει, καθώς

$$\underbrace{\lambda([0,1)^d)}_{=1} \leq \lambda\Big(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}^d \cap (-1,1)^d} (x+N)\Big) \leq \underbrace{\lambda([1,2)^d)}_{=3^d} \quad \blacksquare$$

Δείξαμε ότι υπάρχει $N \subseteq \mathbb{R}^d$ που δεν είναι Lebesgue-μετρήσιμο.

Τώρα θα δείξουμε κάτι πιο ισχυρό: ότι κάθε $A \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ με θετικό μέτρο Lebesgue ($\lambda(A)>0$) έχει υποσύνολο που δεν είναι Lebesgue-μετρήσιμο.

Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω σημαντικό θεώρημα:

→ **Λήμμα του Steinhaus:** Έστω $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ με $\lambda(A)>0$. Τότε, το $A-A := \{a-b : a\in A, b\in A\}$ (το σύνολο διαφορών του A) περιέχει μια μπάλα με κέντρο το 0.

Πριν το αποδείξουμε αυτό:

Παρατηρήσεις: Για το τυχαίο $A \subseteq \mathbb{R}^d$, έχουμε:

- $0 \in A-A$.
- Αν $y \in A-A$, τότε $-y \in A-A$.
- $\boxed{y \in A-A} \iff \exists\, a,b \in A : y = a-b$
  $\iff \exists\, a,b \in A : \underbrace{a}_{\in A} = \underbrace{y+b}_{\in y+A}$
  $\iff \boxed{A \cap (y+A) \neq \emptyset}$.

→ δηλ., $y \in A-A$ $\iff$ αν μετατοπίσουμε το A κατά y, ξαναπέφτουμε εν μέρει πάνω στο A (δεν παίρνουμε ξένο σύνολο ως προς το A).

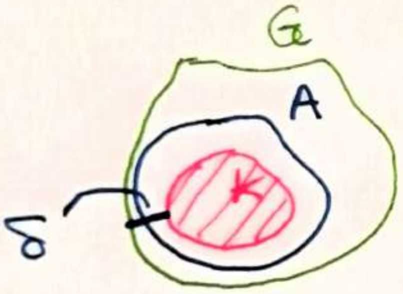
<u>Απόδειξη</u> (Λήμματος Steinhaus):

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda(A)<+\infty$ (καθώς διαφορετικά μπορούμε να δουλέψουμε με κάποιο $A'\subseteq A$ με $0<\lambda(A')<+\infty$).

<u>Έστω ε>0</u>. Υπάρχουν K συμπαγές, G ανοιχτό, ώστε

$K\subseteq A\subseteq G$ και $$\boxed{\begin{aligned}\lambda(A)\leq \lambda(G)&<\lambda(A)+\varepsilon,\\ \lambda(A)-\varepsilon<\lambda(K)&\leq\lambda(A)\end{aligned}}$$

$\lambda(G)\text{"="}\lambda(A)\text{"="}\lambda(K)$



Ορίζουμε $\delta:=\operatorname{dist}(K,G^c)$.

τη σκεφτόμαστε ως την απόσταση των συνόρων των K, G.

Αφού K συμπαγές και G^c κλειστό, $\underline{\delta>0}$.

Επίσης, το ότι το δ είναι η <u>απόσταση</u> των K, G^c σημαίνει ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε $x\in K$ και το μετατοπίσουμε κατά διάνυσμα y μήκους $<\delta$, το $x+y$ <u>δεν</u> ανήκει στο G^c, και άρα ανήκει στο G.

Δηλαδή: $$\boxed{y+K\subseteq G,\quad \forall\, y\in B(0,\delta)}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι, για <u>αυτό</u> το δ,

$$K - K \supseteq B(0,\delta) \quad (\text{και άρα } A-A \supseteq B(0,\delta),$$
$$\text{αφού } A \supseteq K \Rightarrow A-A \supseteq K-K).$$

Οπότε, έστω $y \in B(0,\delta)$. ΘΔΟ $y \in K-K$,

δηλαδή (Παρατήρηση 3) $K \cap (y+K) \neq \emptyset$.

Έστω για άτοπο ότι $K \cap (y+K) = \emptyset$. Τότε,

$$\left.\begin{array}{l} K \subseteq G \\ y+K \subseteq G \end{array}\right. \longrightarrow K \cup (y+K) \subseteq G$$

$$\xrightarrow[\text{σύνολα}]{\text{ξένα}} \lambda(K) + \lambda(y+K) \leq \lambda(G),$$

δηλαδή $(*)$ $\boxed{2\lambda(K) \leq \lambda(G)}$.

Όμως,
$\lambda(G)$ "=" $\lambda(A)$,
$2\lambda(K)$ "=" $2\lambda(A)$,
άρα $2\lambda(A)$ "≤" $\lambda(A)$
άτοπο

Όμως, $$\left.\begin{array}{l} 2\lambda(K) \geq 2\lambda(A) - 2\varepsilon, \\ \lambda(G) < \lambda(A) + \varepsilon \end{array}\right\} \xrightarrow{(*)}$$
και

$$\Rightarrow 2\lambda(A) - 2\varepsilon < \lambda(A) + \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lambda(A) < 3\varepsilon, \quad \underline{\forall \varepsilon > 0}$$
$$\longrightarrow \lambda(A) = 0, \text{ } \underline{\text{άτοπο}}. \text{ Άρα, } y \in K-K.$$

■

→ <u>Πρόταση</u>: (i) Υπάρχει $N \subseteq \mathbb{R}^d$ ώστε $N \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ (β' τρόπος).

(ii) Κάθε $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ με $\lambda(E) > 0$ περιέχει κάποιο υποσύνολο που δεν είναι Lebesgue-μετρήσιμο.

<u>Απόδειξη:</u> (i) Ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας στον $\mathbb{R}^d$: $x \sim y$ στον $\mathbb{R}^d \iff x - y \in \mathbb{Q}^d$.

Δημιουργούμε $N \subseteq \mathbb{R}^d$ που περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισοδυναμίας.

Τότε, (με παρόμοιους τρόπους όπως την Εβδομάδα 1) έχουμε το εξής:

$$\mathbb{R}^d = \coprod_{q \in \mathbb{Q}^d} (q + N).$$

Το $N \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Πράγματι, έστω ότι $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Τότε, $\lambda(\mathbb{R}^d) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \lambda(q+N) \overset{\lambda(q+N) = \lambda(N)}{=\!=\!=} \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \lambda(N)$.

$N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \iff x + N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \ \forall x \in \mathbb{R}^d$

Αφού $\lambda(\mathbb{R}^d) = +\infty$, έχουμε $\lambda(N) > 0$. Άρα, από το

Λήμμα του Steinhaus, $\exists\, \delta>0$ ώστε $N-N \supseteq B(0,\delta)$.

Αυτό είναι άτοπο, καθώς δύο αντιπρόσωποι $n_1 \neq n_2 \in N$ δεν είναι ποτέ ισοδύναμοι, και άρα δε διαφέρουν ποτέ κατά στοιχείο του $\mathbb{Q}^d$. Δηλαδή, το $N-N$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο του $\mathbb{Q}^d$ εκτός από το 0 — ενώ η μπάλα $B(0,\delta)$ περιέχει (άπειρα) στοιχεία του $\mathbb{Q}^d \setminus \{0\}$.

⚠ Αυτό το N είναι που αποκαλείται κανονικά "σύνολο Vitali"!

(ii) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E)>0$.

Από το (i), $\mathbb{R}^d = \coprod_{q \in \mathbb{Q}^d} \underbrace{N_q}_{\substack{\shortparallel \\ q+N}}$, όπου το N είναι το σύνολο Vitali

$$\Longrightarrow \quad E = \coprod_{q\in\mathbb{Q}^d} (E \cap N_q).$$

<u>Κάποιο από τα $E\cap N_q \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$</u>. Πράγματι, έστω ότι $E\cap N_q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ $\forall q \in \mathbb{Q}^d$. Τότε,

$$0 < \lambda(E) = \sum_{q\in\mathbb{Q}^d} \lambda(E\cap N_q) \Longrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q}^d \text{ ώστε}$$

$$\lambda(E\cap N_q) > 0.$$

Άρα, από το Λήμμα του Steinhaus, το $E\cap N_q - E \cap N_q$

περιέχει κάποια μπάλα $B(0,\delta)$ (για κάποιο $\delta>0$),

και άρα το $N_q - N_q \ (\supseteq E\cap N_q - E\cap N_q)$

περιέχει επίσης αυτή την μπάλα.

Όμως, $N_q - N_q = (q+N) - (q+N) = N - N$,

άρα το $N-N \supseteq B(0,\delta)$, και άρα το

$N-N$ περιέχει άπειρα στοιχεία του $\mathbb{Q}^d\setminus\{0\}$,

<u>άτοπο</u> (δύο διαφορετικοί αντιπρόσωποι δεν διαφέρουν

ποτέ κατά στοιχείο του $\mathbb{Q}^d$). ∎