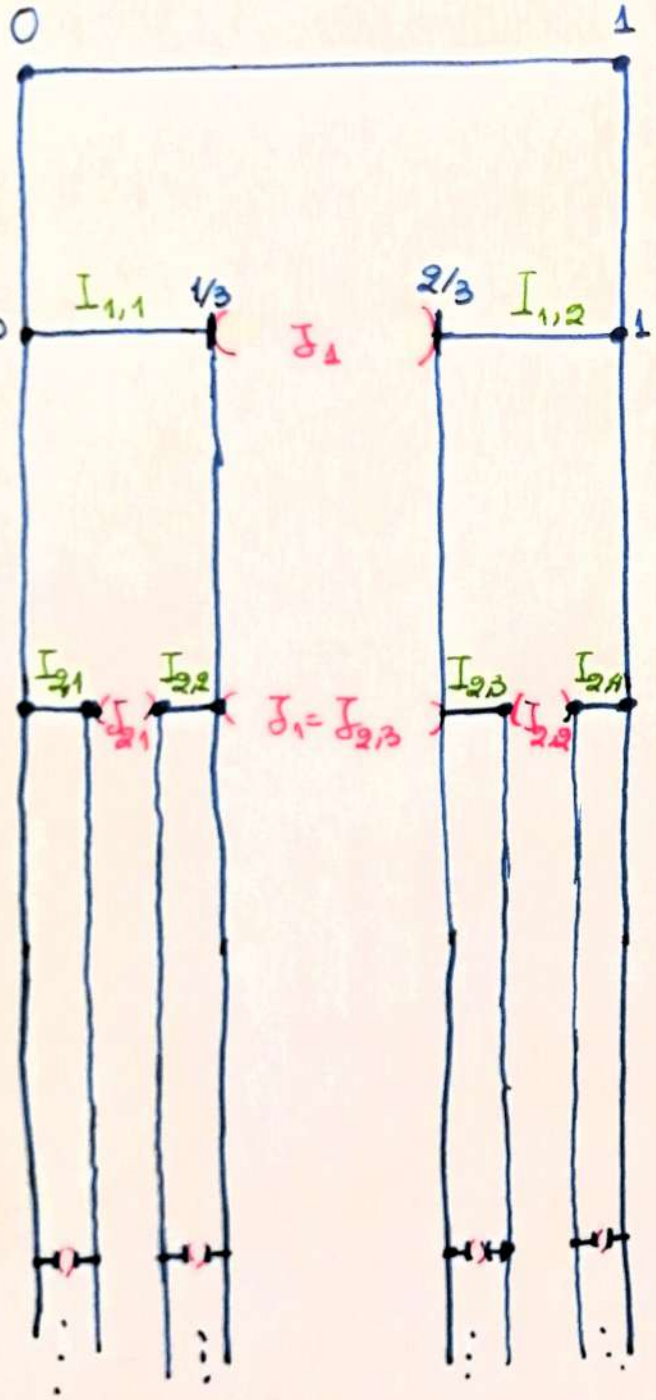
→ $\boxed{\text{Η } \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \text{ είναι αυστηρά μεγαλύτερη της } \mathcal{B}(\mathbb{R}^d):}$

Για να το δείξουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση Cantor - Lebesgue, που ορίζεται χρησιμοποιώντας το σύνολο Cantor.

→ Το σύνολο Cantor:

Ορισμός: Το σύνολο Cantor C είναι η τομή κάποιων συνόλων C_n που δημιουργούμε σε άπειρα στάδια:



$C_0=[0,1]$

$C_1 := [0,1/3] \cup [2/3,1]$

(αφαιρέσαμε το μεσαίο τρίτο (ανοιχτό διάστημα) του διαστήματος του προηγούμενου σταδίου.

$C_2 := [0,1/9] \cup [2/9,1/3]$
$\cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$

(αφαιρέσαμε το μεσαίο τρίτο (ανοιχτό διάστημα) από κάθε κλειστό διάστημα του προηγούμενου σταδίου),

κ.ο.κ.

Η $(C_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία συνόλων.

Κάθε C_n είναι ξένη ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων $I_{n,k}$, $k=1,\dots,2^n$, κάθε ένα με μήκος $1/3^n$. Και κάθε $[0,1]\setminus C_n$ είναι ξένη ένωση

$2^n - 1$ ανοιχτών διαστημάτων $J_{n,m}$, $m = 1, \dots, 2^n - 1$.
(αυτά είναι τα ανοιχτά διαστήματα (μεσαία τρίτα) που αφαιρέθηκαν σε κάθε στάδιο από το 1ο μέχρι και το n-οστό).

Το σύνολο Cantor είναι το $C := \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$.

άρα $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Ιδιότητες: (α) Το C είναι κλειστό:

Κάθε C_n είναι κλειστό (ως ένωση κλειστών διαστημάτων, άρα το C είναι τομή κλειστών συνόλων, και άρα κλειστό σύνολο.

(β) $\lambda(C) = 0$: $\lambda(C) \leq \lambda(C_n) =$

$$= 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow n \to +\infty \\ 0}}{0} \leq \lambda(C) \leq \underset{\substack{\downarrow n \to +\infty \\ 0}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \lambda(C) = 0$.

(γ) Το C είναι άπειρο: Όλα τα άκρα των διαστημάτων $I_{n,k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall k = 1, \dots, 2^n$, ανήκουν σε όλα τα C_n (δεν αφαιρούνται ποτέ), και άρα ανήκουν στο C.

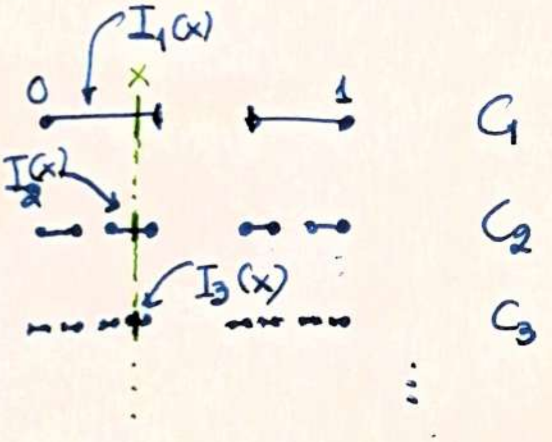
(δ) <u>Το C δεν περιέχει διάστημα:</u> Έστω $(a,b) \subseteq C$ (με $a<b$).

Τότε, $\lambda\big((a,b)\big) \leq \lambda(C) = 0 \Rightarrow \lambda\big((a,b)\big) = 0$,

άτοπο (καθώς $\lambda\big((a,b)\big) = b-a$).

(ε) <u>Κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του C.</u>

Δηλαδή, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ του C, με <u>$x_n \neq x \;\; \forall n \in \mathbb{N}$</u>, ώστε $x_n \longrightarrow x$. Πράγματι, έστω



$x \in C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$. Τότε,

$\forall n \in \mathbb{N}$, υπάρχει κάποιο μοναδικό από τα διαστήματα $I_{n,k}$ (των οποίων η ένωση είναι το C_n) ώστε

$$x \in \underbrace{I_n(x)}_{\text{διάστημα} \subseteq C} = [\ell_n(x), r_n(x)].$$

Από την κατασκευή του C, $I_1(x) \supseteq I_2(x) \supseteq I_3(x) \supseteq \dots$

($\forall n$, το $I_{n+1}(x)$ είναι ή το αριστερό τρίτο ή το δεξί τρίτο του $I_n(x)$ — εκείνο που περιέχει το x).

Και $\underbrace{\lambda\big(I_n(x)\big)}_{\substack{\| \\ r_n(x)-\ell_n(x)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n(x) = \{x\}$

(η τομή είναι μονοσύνολο),

και μάλιστα $x = \lim_{n\to+\infty} l_n(x) = \lim_{n\to+\infty} r_n(x)$.

Τώρα, $\forall n \in \mathbb{N}$, κάποιο από τα άκρα $l_n(x), r_n(x)$ του $I_n(x)$ είναι διαφορετικό από το x. $\forall n$, φιξάρουμε ένα τέτοιο άκρο και το συμβολίζουμε με $a_n(x)$.

Τότε:

- $a_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$: $|\underbrace{a_n(x) - x}_{\in I_n(x) = [l_n(x), r_n(x)]}| \leq r_n(x) - l_n(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- $a_n(x) \in C$ $\forall n \in \mathbb{N}$: το $a_n(x)$ ανήκει στο $I_n(x)$, που περιέχεται στο C.

- $a_n(x) \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (από την κατασκευή του $a_n(x)$).

Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του C.

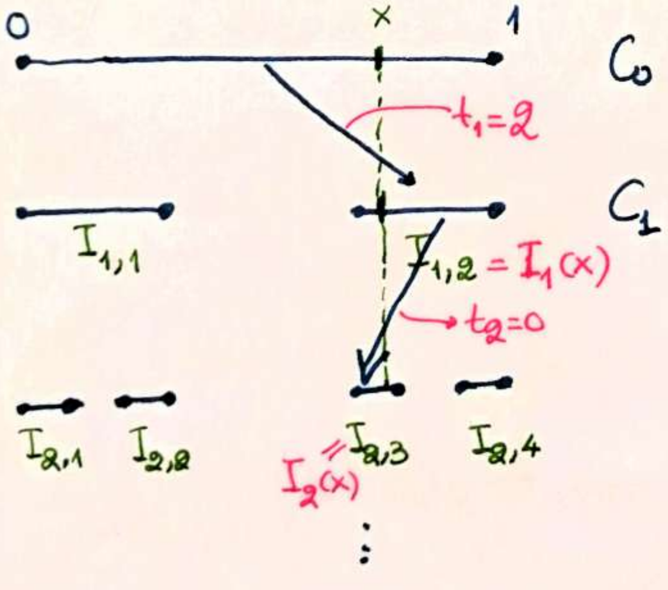
(στ) <u>Το C είναι υπεραριθμήσιμο</u>. Συγκεκριμένα, υπάρχει

$$\Phi : C \to \underbrace{\{0,2\}^{\mathbb{N}}}_{\text{(οι ακολουθίες με όρους 0 ή 2.)}}$$ 1-1 και επί, και άρα

$\# C = 2^{\mathbb{N}}$.

<u>Απόδειξη του (στ)</u>: Βλέπουμε κάθε ακολουθία στο $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ (π.χ. $(0,0,2,0,2,2,\dots)$) σαν μία ακολουθία συντεταγμένων (0 = αριστερά, 2 = δεξιά), που μας λέει προς τα πού να κατευθυνθούμε από στάδιο σε στάδιο (από το C_n προς το C_{n+1}, $\forall n$) ώστε να βρούμε τελικά το x.

Πράγματι, $\forall x \in C$, ορίζουμε $\Phi(x) = (t_1, t_2, t_3, \dots) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής: $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n(x)$ (όπου το $I_n(x)$ είναι το διάστημα από τα $I_{n,k}$ του σταδίου n που περιέχει το x).



Ορίζουμε: $t_1 = 0$ αν το $I_1(x)$ είναι το αριστερό τρίτο του $C_0 = [0,1]$, και $t_1 = 2$ αν το $I_1(x)$ είναι το δεξί τρίτο του $C_0 = [0,1]$.

Ορίζουμε $t_2 = 0$ αν το $I_2(x)$ είναι το αριστερό τρίτο του $I_1(x)$, και $t_2 = 2$ αν το $I_2(x)$ είναι το δεξί τρίτο του $I_1(x)$.

Και ούτω καθεξής:

Έστω ότι έχουμε ορίσει τα $t_1, \dots, t_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε, ορίζουμε $t_{n+1} = 0$ αν το $I_{n+1}(x)$ είναι το αριστερό τρίτο του $I_n(x)$, και $t_{n+1} = 2$ αν το $I_{n+1}(x)$ είναι το δεξί τρίτο του $I_n(x)$.

- <u>Η Φ είναι 1-1:</u> Έστω $x \neq y$ στο C. Τότε, $\Phi(x) \neq \Phi(y)$:

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n(x) \quad , \quad \{y\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n(y) .$$

Αφού $x \neq y$, υπάρχει κάποιος $n \in \mathbb{N}$ ώστε $I_n(x) \neq I_n(y)$. Έστω n_0 ο ελάχιστος φυσικός ώστε $I_{n_0}(x) \neq I_{n_0}(y)$.

Τότε, $I_i(x) = I_i(y) \quad \forall i = 1, \dots, n_0 - 1$, και άρα $t_1 = t_2 = \dots = t_{n_0 - 1}$. Επιπλέον, τότε το ότι $I_{n_0}(x) \neq I_{n_0}(y)$ σημαίνει πως κάποιο από τα $I_{n_0}(x)$, $I_{n_0}(y)$ είναι το αριστερό τρίτο του $I_{n_0-1}(x) \left(= I_{n_0-1}(y)\right)$, και το άλλο το δεξί.

Άρα, το t_{n_0} για το x είναι διαφορετικό του t_{n_0} για το y. Άρα, $\Phi(x) \neq \Phi(y)$.

• <u>Η Φ είναι επί:</u> Έστω $(t_1, t_2, \dots) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$.

Θα βρούμε $x \in C$ ώστε $\Phi(x) = (t_1, t_2, \dots)$.

Πάλι βλέπουμε την ακολουθία των 0, 2 ως ακολουθία συντεταγμένων (αριστερά, δεξιά), και με βάση αυτή βρίσκουμε το x ως εξής:

⇝ Αν $t_1 = 0$, ορίζουμε $I_1 := I_{1,1}$, το αριστερό τρίτο του $[0,1]$. Αν $t_1 = 2$, ορίζουμε $I_1 := I_{1,2}$, το δεξί τρίτο του $[0,1]$. Φυσικά, $I_1 \subseteq C_1$.

⇝ Αν $t_2 = 0$, ορίζουμε $I_2 :=$ το αριστερό τρίτο (κλειστό διάστημα) του I_1.

Αν $t_2 = 2$, ορίζουμε $I_2 :=$ το δεξί τρίτο (κλειστό διάστημα) του I_1.

Παρατηρούμε ότι $I_2 \subseteq C_2$,

κ.ο.κ.

Τότε, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ και τα μήκη των I_n συγκλίνουν στο 0 (το I_n έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$).

Άρα, από την αρχή κιβωτισμένων διαστημάτων,

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{x\}, \text{ για κάποιο } x \in \mathbb{R}.$$

Μάλιστα, $x \in C$ (αφού $I_n \subseteq C_n \ \forall n$,

και άρα $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n = C$).

Από την παραπάνω κατασκευή, παρατηρούμε ότι

$I_n = I_n(x) \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα, $(t_1, t_2, \dots) = \Phi(x)$.

∎

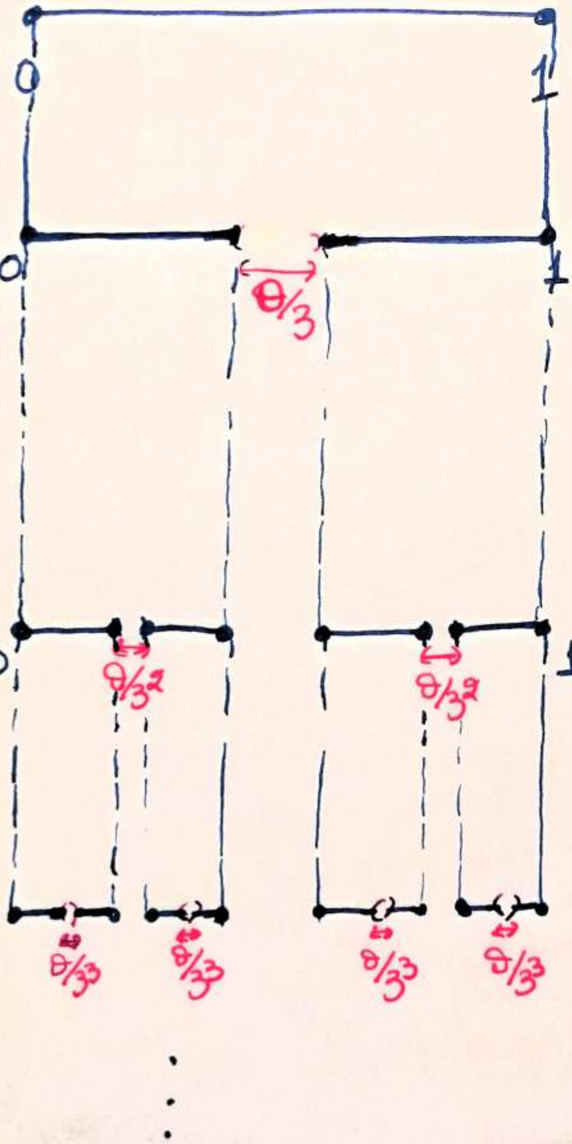
<u>Άσκηση:</u> $C = \left\{ x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n}{3^n} : t_n = 0 \text{ ή } 2 \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$.

(Υπόδειξη: $\forall x \in C$, η αντίστοιχη $(t_1, t_2, t_3, \dots)$ είναι η $\Phi(x)$).

→ Μία παραλλαγή του συνόλου Cantor με θετικό μέτρο:

Σε αυτή την παραλλαγή, αφαιρούμε σε κάθε στάδιο κάτι λιγότερο απ' ότι αφαιρέσαμε στο αντίστοιχο στάδιο της κατασκευής του συνόλου Cantor:

Έστω $\boxed{0<\theta<1}$.



$C_0(\theta) = [0,1]$

$C_1(\theta)$: Για να κατασκευάσουμε το $C_1(\theta)$, αφαιρούμε από το $C_0(\theta)$ το μεσαίο ανοιχτό διάστημά του, μήκους $\theta/3$ $(< 1/3)$.

$C_2(\theta)$: Κατασκευάζουμε το $C_2(\theta)$ αφαιρώντας από κάθε κλειστό διάστημα του $C_1(\theta)$ το μεσαίο ανοιχτό διάστημά του με μήκος $\theta/3^2$ $(< 1/3^2)$

⋮

$C_n(\theta)$: Το κατασκευάζουμε αφαιρώντας από κάθε κλειστό διάστημα του $C_{n-1}(\theta)$ το μεσαίο ανοιχτό διάστημά του με μήκος $\theta/3^n$ $(< 1/3^n)$.

⋮

Ορίζουμε $C(\theta) := \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n(\theta)$.

Ιδιότητες του $C(\theta)$:

- Το $C(\theta)$ είναι κλειστό.
- Το $C(\theta)$ δεν περιέχει διάστημα.
- Το $C(\theta)$ είναι υπεραριθμήσιμο $(\# C(\theta) = 2^{\mathbb{N}})$.
- Κάθε σημείο του $C(\theta)$ είναι σημείο συσσώρευσης του $C(\theta)$.

(Οι αποδείξεις είναι παρόμοιες με τις αντίστοιχες για το C).

Όμως: $\boxed{\lambda\left(C(\theta)\right) > 0}$:

$\lambda\left([0,1] \setminus C(\theta)\right)$ = το άθροισμα των μηκών των ανοιχτών διαστημάτων που αφαιρέθηκαν σε κάθε στάδιο

$$= \frac{\vartheta}{3} + 2 \cdot \frac{\vartheta}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{\vartheta}{3^3} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{\vartheta}{3^n} + \dots$$

$$= \frac{\vartheta}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots\right)$$

$$= \frac{\vartheta}{3} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}}}_{=3} = \vartheta^{<1}.$$

Άρα, $\lambda(\underbrace{C(\theta)}_{\subseteq [0,1]}) = 1 - \lambda\left([0,1] \setminus C(\theta)\right) = 1 - \vartheta > 0$. ∎