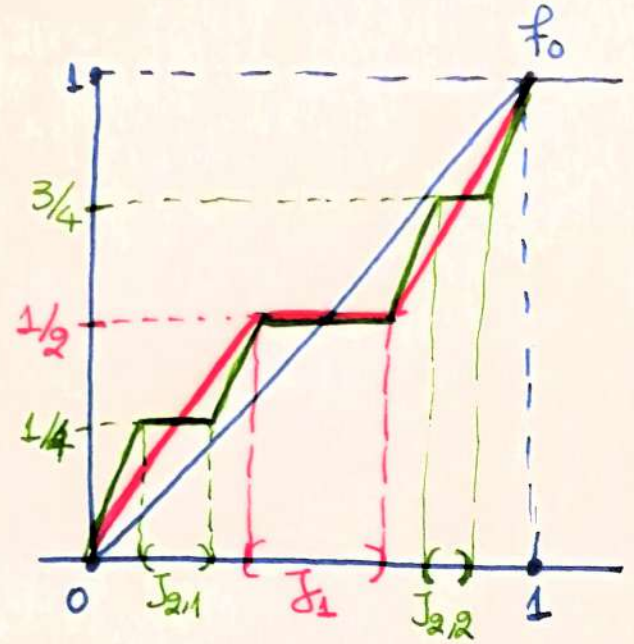
Τώρα θα ορίσουμε τη συνάρτηση <u>Cantor-Lebesgue</u>.

• Είναι μία $f: [0,1] \to [0,1]$ αύξουσα (όχι γνησίως), επί, με $f(C) = [0,1]$. Δηλαδή, η f στέλνει ένα σύνολο μέτρου 0 σε ένα σύνολο με θετικό μέτρο (Lebesgue). Μάλιστα, η f "επιτυγχάνει" όλη την άνοδο από το $f(0)=0$ στο $f(1)=1$ πάνω από το σύνολο Cantor C. (που έχει μέτρο 0)

Αργότερα, η Cantor-Lebesgue θα μας βοηθήσει να δείξουμε ότι <u>υπάρχει Lebesgue-μετρήσιμο σύνολο που δεν είναι Borel-μετρήσιμο</u> (και άρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R})$).

→ **Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue** :



- $f_0 : [0,1] \to [0,1]$, $f_0(x) := x$ $\forall x \in [0,1]$.

  $f_0(0)=0$, $f_0(1)=1$, $f_0 \nearrow$, συνεχής ($\Rightarrow$ επί του $[0,1]$).

- $f_1 : [0,1] \to [0,1]$, $f_1 = \frac{1}{2}$ πάνω από το $J_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

  (το μεσαίο ανοιχτό τρίτο που αφαιρέσαμε στο στάδιο 1 της κατασκευής του συνόλου Cantor για να πάρουμε το C_1) . Κατά τα άλλα, επεκτείνουμε την f_1 γραμμικά , ώστε:

  $f_1(0)=0$, $f_1(1)=1$, $\Rightarrow f_1 \nearrow$, συνεχής ($\Rightarrow$ επί του $[0,1]$).

- $f_2 : [0,1] \to [0,1]$, $f_2 = f_1 = \frac{1}{2}$ πάνω από το J_1,

  $f_2 = \frac{1}{4}$ πάνω από το $J_{2,1}$ και $f_2 = \frac{3}{4}$ πάνω από το $J_{2,2}$

(όπου τα $J_{2,1}, J_{2,2}$ είναι, από αριστερά προς τα δεξιά τα δύο διαστήματα που αφαιρέθηκαν από το C_1 κατά το στάδιο 2 της κατασκευής του συνόλου Cantor, για να πάρουμε το C_2).

Κατά τα άλλα, επεκτείνουμε την f_2 γραμμικά, ώστε:

$f_2(0)=0$, $f_2(1)=1$, $\Rightarrow f_2 \nearrow$, συνεχής ($\Rightarrow f_2$ επί του $[0,1]$),

κ.ο.κ.

Δημιουργούμε μία ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ <u>συνεχών</u> συναρτήσεων $f_n: [0,1] \to [0,1]$, με $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$, $f_n \nearrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, κάθε f_n είναι επί του $[0,1]$.

- Κάθε f_n είναι σταθερή στα ανοιχτά διαστήματα των οποίων η (ξένη) ένωση είναι το $[0,1] \setminus C_n$ (με το συμβολισμό στον ορισμό του C_n, αυτά ήταν τα $J_{n,m}$, $m=1,\dots,2^n-1$).

και οι $f_{n+1}, f_{n+2}, f_{n+3}, \dots$ είναι ίσες με την f_n στα $J_{n,m}$.

• $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty = \max\{|f_{n+1}(x) - f_n(x)| : x \in [0,1]\}$

$$\leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αφού $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$, η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ είναι <u>Cauchy</u> στον $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

ο χώρος των συνεχών $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

Αφού ο $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, η $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$ συγκλίνει σε κάποια f στον <u>$C([0,1])$</u> ως προς την $\|\cdot\|_\infty$. Δηλαδή,

$\exists$ $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, ώστε

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

$$\left(\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) \quad \forall x \in [0,1]\right).$$

Αυτό το όριο f (ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων)

είναι η συνάρτηση Cantor - Lebesgue.

Ιδιότητες:

- Η f είναι συνεχής.

- $f \nearrow$: $\forall\, x \leq y$ στο $[0,1]$,

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \leq & f_n(y) \quad \forall n \ (\text{αφού } f_n \nearrow) \\ \downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} & & \downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} \\ f(x) & & f(y) \end{array}$$

$\rightarrow$ $f(x) \leq f(y)$.

- $f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$, $f(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1)$.

- Από τα παραπάνω, $f : [0,1] \to [0,1]$, επί.

- Η f είναι σταθερή σε όλα τα $J_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, 2^n - 1$ (δηλ. σε όλα τα ανοιχτά διαστήματα των οποίων η ξένη ένωση είναι το $[0,1] \setminus C$).

Δηλαδή, η f αλλάζει μόνο πάνω από το σύνολο Cantor C (δηλαδή ένα σύνολο μέτρου 0).

- $\underline{f(C)=[0,1]}$. Πράγματι, $f([0,1])=[0,1]$,

άρα $[0,1]=f(C)\cup f([0,1]\setminus C)$.

Όμως, $f(\underbrace{[0,1]\setminus C}_{\amalg J_{n,k}})\subseteq f(C)$, καθώς, $\forall n,k$,

η $\overset{\text{τιμή}}{f(J_{n,k})}$ είναι και η τιμή που παίρνουν τα άκρα του (ανοιχτού) $J_{n,k}$, και αυτά τα άκρα ανήκουν στο C.

Άρα, $f(C)=[0,1]$.

- Προκύπτει ότι, $\boxed{\text{ενώ } \lambda(C)=0, \text{ έχουμε: } \lambda(f(C))\geq 1.}$

Τώρα αλλάζουμε λίγο τη συνάρτηση Cantor-Lebesgue, ώστε να γίνει και γνησίως αύξουσα. Πάλι η συνάρτηση g που θα προκύψει θα είναι συνεχής, και θα στέλνει το C (μέτρο 0) σε σύνολο θετικού μέτρου Lebesgue. Η g θα έχει το πλεονέκτημα ότι είναι και 1-1. Αυτό θα βοηθήσει στο να βρούμε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$:

→ Γνησίως αύξουσα παραλλαγή της Cantor-Lebesgue:

Έστω $g : [0,1] \to [0,2]$, με $g(x) = f(x) + x$

(όπου $f : [0,1] \to [0,1]$ είναι η συνάρτηση Cantor - Lebesgue).

Τότε:

- Η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής, επί του $[0,2]$.

$\Downarrow$

- Ορίζεται η αντίστροφη $g^{-1} : [0,2] \to [0,1]$.
- $\lambda\left(g(C)\right) > 0$: Δείχνουμε ότι $\lambda\left(g([0,1] \setminus C)\right) < 2$.

Πράγματι, $[0,1]\setminus C = \coprod_{n,k} J_{n,k}$

$$\Rightarrow g\left([0,1]\setminus C\right) = \bigcup_{n,k} g(J_{n,k}).$$

Τώρα, $\forall n,k$, η f είναι σταθερή στο $J_{n,k}$

$\rightarrow$ η $f(J_{n,k})$ είναι μονοσύνολο, έστω $\{c_{n,k}\}$.

Άρα,
$$\begin{aligned} g(J_{n,k}) &= \{g(x) : x\in J_{n,k}\} \\ &= \{f(x)+x : x\in J_{n,k}\} \\ &= \{c_{n,k}+x : x\in J_{n,k}\} \\ &= c_{n,k}+J_{n,k}, \text{ μεταφορά του } J_{n,k}. \end{aligned}$$

Οπότε,
$$\begin{aligned} \lambda\left(g([0,1]\setminus C)\right) &\le \sum_{n,k} \lambda\Big(\underbrace{g(J_{n,k})}_{\overset{\shortparallel}{c_{n,k}+J_{n,k}}}\Big) \\ &= \sum_{n,k} \lambda(J_{n,k}) \\ &\overset{\coprod_{n,k} J_{n,k} = [0,1]\setminus C}{=} \lambda\left([0,1]\setminus C\right) = 1. \end{aligned}$$

Αφού $[0,2] = g([0,1]) = g(C) \cup g([0,1]\setminus C)$

$$\Rightarrow 2 \le \lambda(g(C)) + \underbrace{\lambda\left(g([0,1]\setminus C)\right)}_{\le 1},$$

προκύπτει ότι $\lambda(g(C)) \ge 2-1=1.$ ∎

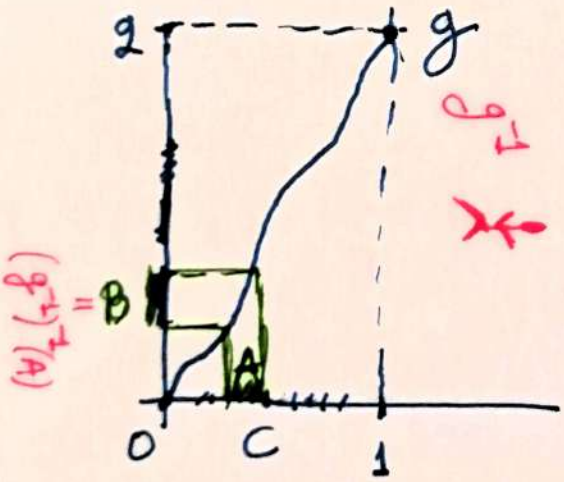
→ $\boxed{\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R})}$:

→ <u>Πρόταση</u>: Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ που είναι Lebesgue μετρήσιμο αλλά όχι Borel
(δηλ., $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ αλλά $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$).

<u>Απόδειξη</u>: Χρησιμοποιούμε τη γνησίως αύξουσα, συνεχή, επί $g : [0,1] \to [0,2]$, με $g(x) = f(x) + x \;\; \forall x \in [0,1]$, όπου f είναι η συνάρτηση Cantor-Lebesgue.

Ξέρουμε ότι:

ενώ $\lambda(C) = 0$, έχουμε: $\lambda\big(g(C)\big) > 0$.



Αφού το $g(C)$ έχει <u>θετικό</u> μέτρο Lebesgue, περιέχει $B \subseteq g(C)$ που <u>δεν</u> είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Έχουμε: $B = g(A)$, για κάποιο $A \subseteq C$.

- Το $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$: $A \subseteq C$, $\lambda(C) = 0$, το λ είναι πλήρες μέτρο.
- Το $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$: Χρειαζόμαστε το εξής:.

<u>Λήμμα</u>: Έστω $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε, η h αντιστρέφει σύνολα Borel σε σύνολα Borel. Δηλαδή: $h^{-1}(B)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall\, B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Αναβάλλουμε για λίγο την απόδειξη του λήμματος, για να δείξουμε ότι $A\notin\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

<u>Έστω ότι $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.</u>

Η g^{-1} αντιστρέφει το A στο B, που $\notin\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ενώ g^{-1} συνεχής), άτοπο.

Πιο αναλυτικά: Έστω $h:=g^{-1}:[0,2]\to[0,1]$.

Η h είναι καλά ορισμένη <u>και</u> συνεχής, άρα αντιστρέφει Borel σε Borel. Οπότε:

$A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\Rightarrow h^{-1}(A)=(g^{-1})^{-1}(A)=g(A)=B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

<u>άτοπο</u>, αφού το B δεν είναι καν Lebesgue-μετρήσιμο. ($B\notin\mathcal{L}(\mathbb{R})$, άρα $B\notin$ στη μικρότερη $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Άρα, $A\notin\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

∎

Κλείνουμε με την απόδειξη του λήμματος:

<u>Απόδ.</u> (λήμματος σελ. 12):

Έστω $\mathcal{A} := \{ B \subseteq \mathbb{R} ; \; h^{-1}(B) \text{ Borel} \}$.

Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα (άσκηση), και

$$\underbrace{\mathcal{T}}_{\substack{\text{τα ανοιχτά} \\ \subseteq \mathbb{R}}} \subseteq \mathcal{A} \quad ,$$

καθώς αν U ανοιχτό $\xrightarrow{h \text{ συνεχής}}$ $h^{-1}(U)$ ανοιχτό.

Άρα, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{A}$.

■