→ Μετρήσιμες συναρτήσεις:

→ Συμβολισμός: Έστω $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (υποσύνολο του συνόλου αφίξεως),

$$f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

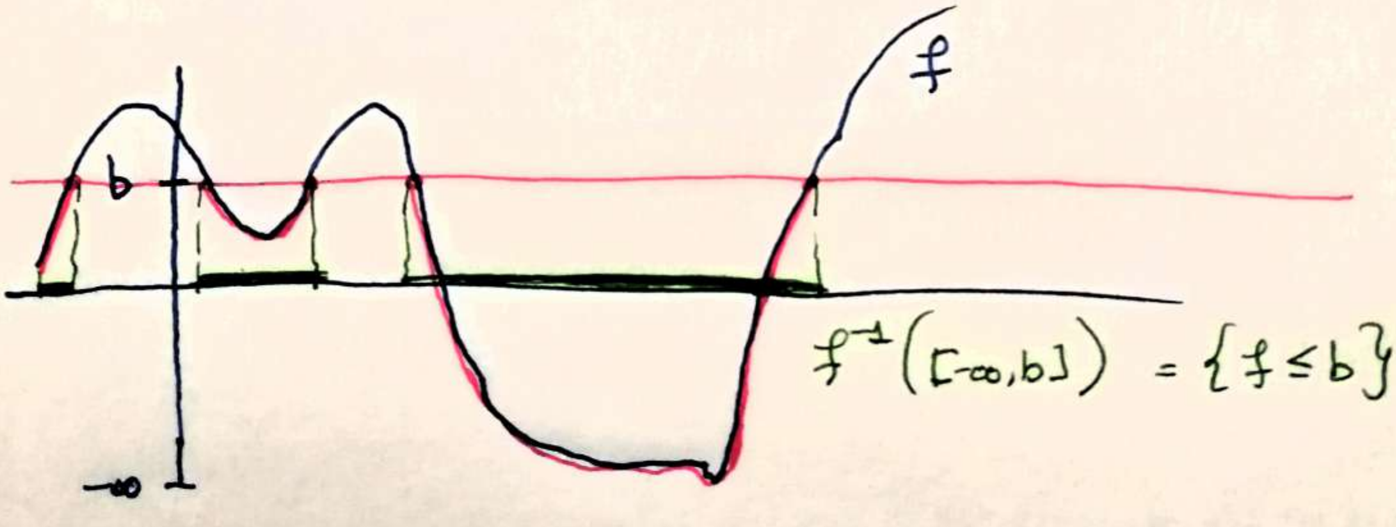
- Για κάθε $b \in \mathbb{R}$,

$$\{f \leq b\} := \{x \in X : f(x) \leq b\}.$$

⚠ Δεν είναι σύνολο συναρτήσεων!

Άρα, $\{f \leq b\} = f^{-1}([-\infty, b])$.

(και στην ειδική περίπτωση που η f παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, αυτό ισούται με $f^{-1}((-\infty, b])$).



→ <u>Ορισμός</u>: Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος (δηλ., $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο X).

Έστω $f: X \to [-\infty, +\infty]$. Η f είναι <u>$\mathcal{A}$-μετρήσιμη</u> αν:

$$\forall b \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\{f \leq b\}}_{= f^{-1}([-\infty, b])} \in \mathcal{A}.$$

⚠ Στην ειδική περίπτωση που $f: X \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{-\infty\}) = \emptyset$, και άρα το παραπάνω είναι ισοδύναμο με: $f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{A}$.

Αφού τα σύνολα $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, παράγουν την $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, υποψιαζόμαστε ότι, αν η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, τότε αντιστρέφει σύνολα Borel σε στοιχεία της $\mathcal{A}$. Πράγματι, αυτό ισχύει.

ΘΔΟ:
- Μια $f: (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη $\Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Μια $f: (X, \mathcal{A}) \to [-\infty, +\infty]$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη $\Leftrightarrow f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$, και $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

→ Πρόταση: Έστω $f:(X,\mathcal{A}) \to [-\infty,+\infty]$.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

① $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

② $f^{-1}\big((-\infty,b]\big) \in \mathcal{A}, \quad \forall b \in \mathbb{R}$.

③ $f^{-1}\big((-\infty,b)\big) \in \mathcal{A}, \quad \forall b \in \mathbb{R}$.

④ $f^{-1}\big([b,+\infty)\big) \in \mathcal{A}, \quad \forall b \in \mathbb{R}$.

⑤ $f^{-1}\big((b,+\infty)\big) \in \mathcal{A}, \quad \forall b \in \mathbb{R}$.

⑥ $f^{-1}\big((a,b)\big) \in \mathcal{A}, \quad \forall a<b$ στο $\mathbb{R}$.

⑦ $f^{-1}\big([a,b]\big) \in \mathcal{A}, \quad \forall a<b$ στο $\mathbb{R}$.

⑧ $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}, \quad \forall U$ ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}$.

⑨ $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}, \quad \forall F$ κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Το ① συνεπάγεται τα ② — ⑨, καθώς κάθε ένα από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που αντιστρέφουμε μέσω της f στα ② — ⑨ είναι Borel.

Τα ② — ⑨ συνεπάγονται, κάθε ένα, το ①.
Δείχνουμε ενδεικτικά ότι ⑥ ⟹ ①, και οι υπόλοιπες αποδείξεις είναι παρόμοιες :

Έστω λοιπόν ότι ισχύει το ⑥, δηλ. ότι

$f^{-1}((a,b)) \in \mathcal{A}, \quad \forall a<b$ στο $\mathbb{R}$.

Ορίζουμε $\mathcal{C} := \{B \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$.

Για να δείξουμε το ①, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}$. Πράγματι: <u>Η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα:</u>

⊙ <u>$\mathbb{R} \in \mathcal{C}$:</u> $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n,n)$

$$\Rightarrow f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}((-n,n))}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

⊙ <u>Αν $B\in\mathcal{C}$, τότε $\mathbb{R}\setminus B \in \mathcal{C}$:</u>

$B \in \mathcal{C} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Και:

$$f^{-1}(\mathbb{R}\setminus B) = \underbrace{f^{-1}(\mathbb{R})}_{\in\mathcal{A}} \setminus \underbrace{f^{-1}(B)}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

⊙ <u>Έστω $B_1, B_2, B_3, \ldots \in \mathcal{C}$. Τότε, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{C}$:</u>

Ξέρουμε ότι $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Άρα, $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f^{-1}(B_n)}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$.

Αφού η σ-άλγεβρα $\mathcal{C}$ περιέχει όλα τα διαστήματα (a,b) (λόγω του ⑥), περιέχει και όλη τη σ-άλγεβρα που παράγεται από αυτά, δηλαδή τη $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

■

Το παρακάτω είναι άμεσο, καθώς, όταν $f: (X,\mathcal{A}) \to \underline{\mathbb{R}}$, τότε η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη $\Leftrightarrow f^{-1}((-\infty,b]) \in \mathcal{A} \ \forall b \in \mathbb{R}$, δηλ. $\Leftrightarrow$ ισχύει το ②:

→ <u>Πόρισμα:</u> Έστω $f: (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$. Τότε, η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη $\Longleftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

⚠ Αυτό δείχνει πως η έννοια της $\mathcal{B}(X)$-μετρησιμότητας είναι <u>πιο γενική</u> από την έννοια της συνέχειας (για μετρικούς χώρους (X,d)). Συγκεκριμένα, μία $f: X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής αν αντιστρέφει ανοιχτά σε ανοιχτά. Η $f: X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{B}(X)$-μετρήσιμη αν αντιστρέφει ανοιχτά σε Borel

($\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{T})$, όπου $\mathcal{T}$ τα ανοιχτά του (X,d)).

Άρα, f συνεχής $\rightarrow$ f $\mathcal{B}(X)$-μετρήσιμη.

Αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο.

Τώρα θέλουμε να δούμε πώς αντιστρέφει τα Borel σύνολα μία μετρήσιμη $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ (που δηλαδή της επιτρέπεται να παίρνει τις τιμές $\pm\infty$). Προς το παρόν, ξέρουμε ότι $f^{-1}([-\infty, b]) \in \mathcal{A}$ $\forall b \in \mathbb{R}$. Προκύπτει ότι $f^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{A}$ $\forall b \in \mathbb{R}$, ώστε να έχουμε ότι τα Borel αντιστρέφονται στην $\mathcal{A}$ από την προηγούμενη πρόταση; Θα δούμε πως ναι, και θα μας βοηθήσει το παρακάτω.

→ <u>Πρόταση</u>: Έστω $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow [-\infty, +\infty]$.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη (δηλ., $\underbrace{f^{-1}([-\infty, b])}_{\{f \leq b\}} \in \mathcal{A}$ $\forall b \in \mathbb{R}$).

② $f^{-1}([-\infty, b)) \in \mathcal{A} \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$\quad \overset{\shortparallel}{\{f < b\}}$

③ $f^{-1}([b, +\infty]) \in \mathcal{A}, \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$\quad \overset{\shortparallel}{\{f \geq b\}}$

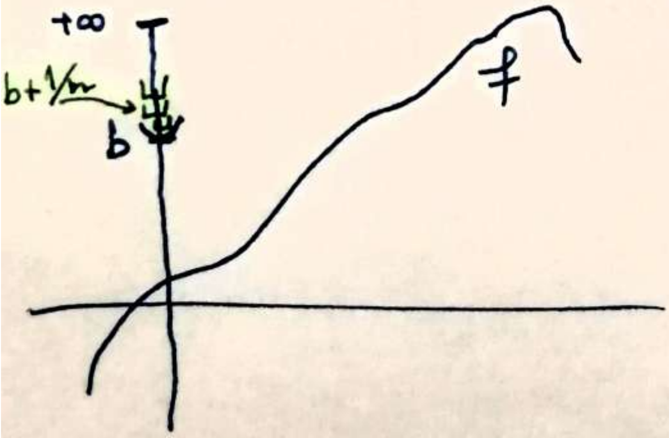
④ $f^{-1}((b, +\infty]) \in \mathcal{A}, \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$\quad \overset{\shortparallel}{\{f > b\}}.$

<u>Απόδειξη</u>: ① ⇒ ②: $\{f < b\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\{f \leq b - \tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$

② ⇒ ③: $\{f \geq b\} = X \setminus \underbrace{\{f < b\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$

③ ⇒ ④: $\{f > b\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\{f \geq b + \tfrac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$



④ ⇒ ①:

$\{f \leq b\} = X \setminus \underbrace{\{f > b\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$

■

→ <u>Πόρισμα:</u> Έστω $f: (X, \mathcal{A}) \to [-\infty, +\infty]$.

Τότε, η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη

$$\Longleftrightarrow$$

$f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$, και $\boxed{f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$

αυτό είναι ισοδύναμο με <u>οποιοδήποτε</u> από τα ② — ⑨ της σελίδας 3.

<u>Απόδειξη:</u>

($\Longleftarrow$) Έστω $b \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$f^{-1}([-\infty, b]) = \underbrace{f^{-1}(\{-\infty\})}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{f^{-1}(\underbrace{(-\infty, b]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})})}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

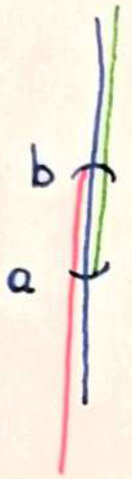
Άρα, η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

($\Longrightarrow$) Γνωρίζουμε ότι, $\forall b \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty, b]) \in \mathcal{A}$.

⊙ $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \ \forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$: Αρκεί ΝΔΟ

$f^{-1}((a,b)) \in \mathcal{A}, \ \forall a<b$ στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, $(a,b) = (a,+\infty] \cap [-\infty, b)$



$$\Rightarrow f^{-1}((a,b)) = \underbrace{f^{-1}((a,+\infty])}_{\in \mathcal{A},} \cap \underbrace{f^{-1}([-\infty,b))}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

(από προηγούμενη πρόταση)

⊙ $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$: $\{-\infty\} = [-\infty, 0] \setminus (-\infty, 0]$

$$\longrightarrow f^{-1}(\{-\infty\}) = \underbrace{f^{-1}([-\infty,0])}_{\substack{\in \mathcal{A} \\ (f\ \mathcal{A}\text{-μετρήσιμη})}} \setminus \underbrace{f^{-1}(\underbrace{(-\infty,0]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})})}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

⊙ $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$: $\{+\infty\} = [0, +\infty] \setminus [0, +\infty)$

$$\Rightarrow f^{-1}(\{+\infty\}) = \underbrace{f^{-1}([0,+\infty])}_{\substack{\in \mathcal{A} \\ (\text{προηγούμενη} \\ \text{πρόταση})}} \setminus \underbrace{f^{-1}(\underbrace{[0,+\infty)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})})}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

■

→ Σημαντικές ειδικές περιπτώσεις:

Ορισμός: Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$.

• Λέμε ότι η f είναι Borel-μετρήσιμη αν

$$\{f \leq b\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad , \quad \forall b \in \mathbb{R}.$$

(Δηλ., αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$)

(δηλ., θεωρούμε εδώ μετρησιμότητα για την

$$f : (\mathbb{R}, \underset{\mathcal{A}}{\underset{\parallel}{\mathcal{B}(\mathbb{R})}}) \longrightarrow [-\infty, +\infty]).$$

• Λέμε ότι η f είναι Lebesgue-μετρήσιμη αν

$$\{f \leq b\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \quad , \quad \forall b \in \mathbb{R}.$$

(Δηλ., αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ και $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$)

(δηλ., εδώ θεωρούμε μετρησιμότητα της

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})) \longrightarrow [-\infty, +\infty]).$$

⚠ Τονίζουμε πως όταν μιλάμε για μετρησιμότητα μιας $f:(X,\mathcal{A}) \to [-\infty,+\infty]$, η σ-άλγεβρα που μας απασχολεί στο $\mathbb{R}$ (μέσα στο σύνολο αφίξεως $[-\infty,+\infty]$) είναι <u>πάντα</u> η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Δηλαδή, πάντα μάς απασχολούν οι αντίστροφες εικόνες των <u>Borel</u> (και όχι των Lebesgue) συνόλων!

→ <u>Σημαντικά παραδείγματα:</u>

① Κάθε $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ συνεχής είναι Borel-μετρήσιμη. (δηλ., $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-μετρήσιμη), και άρα και Lebesgue-μετρήσιμη.

<u>Απόδειξη:</u> (α' τρόπος): $f^{-1}(\mathcal{U})$ ανοιχτό, και άρα Borel, $\forall\, \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό (αφού f συνεχής).

(β' τρόπος): $\forall\, b \in \mathbb{R}$,

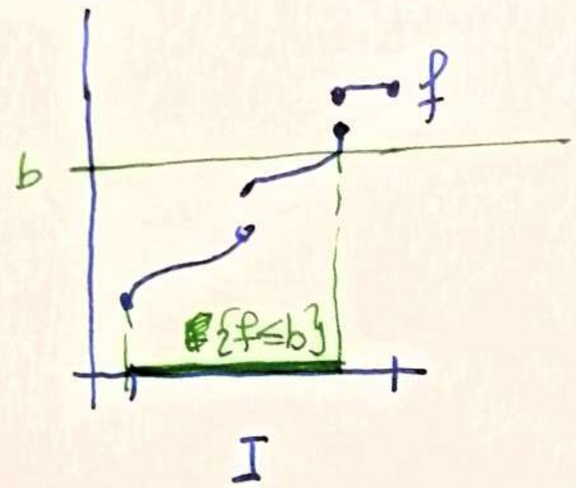
$$\{f \leq b\} = f^{-1}\big(\underbrace{(-\infty,b]}_{\substack{\text{κλειστό}\\ \subseteq \mathbb{R}}}\big) \text{ κλειστό } \subseteq \mathbb{R}^d$$

(αφού f συνεχής), και άρα Borel.

(2) Κάθε $\underset{\sim}{f: I} \to \mathbb{R}$ αύξουσα είναι Borel-μετρήσιμη.

διάστημα! $\subseteq \mathbb{R}$

<u>Αποδ.</u>



Έστω $b \in \mathbb{R}$.

Τότε, το $\{f \leq b\}$ είναι <u>διάστημα</u> (και άρα στη $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Πράγματι, έστω $x < y$ στο $\{f \leq b\} = \{x \in I : f(x) \leq b\}$.

ΘΔΟ: $\forall$ z με $x < z < y$, έχουμε και ότι $z \in \{f \leq b\}$. (Αυτό θα συνεπάγεται ότι το $\{f \leq b\}$ είναι διάστημα, και η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί.):

Αφού το I είναι διάστημα και τα $x < y$ ανήκουν στο I, έχουμε ότι και το z, που ζεί ανάμεσά τους, ανήκει στο I. Άρα, υπάρχει το $f(z)$. Και έτσι: $x < z < y \Rightarrow f(x) \leq f(z) \leq f(y) \leq b$

$y \in \{f \leq b\}$.

Οπότε, $f(z) \leq b$, δηλ. $z \in \{f \leq b\}$. ∎

③ Έστω $(X, \mathcal{A})$ χώρος μέτρου, και $E \subseteq X$. Ορίζουμε τη <u>χαρακτηριστική</u> (ή δείκτρια) <u>συνάρτηση του E</u>, χ_E, ως εξής:

$$\chi_E : X \to \mathbb{R},$$

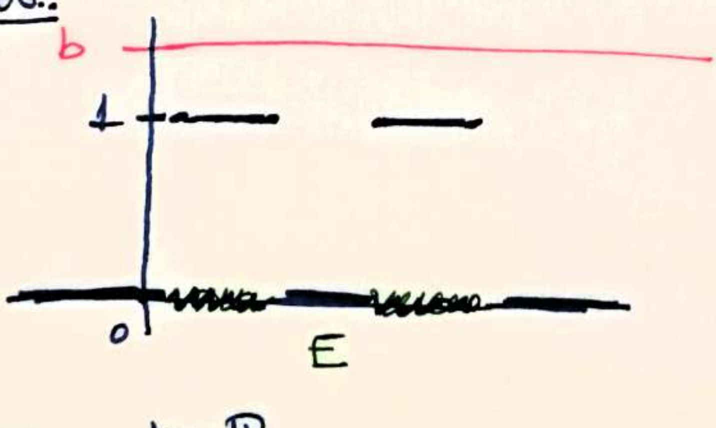
$$\chi_E(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{array} \right\}.$$

Η χ_E είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη $\Leftrightarrow E \in \mathcal{A}$.

<u>Ειδικές περιπτώσεις</u>: Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε,

- χ_E Borel-μετρήσιμη $\Leftrightarrow$ το E είναι Borel.
- χ_E Lebesgue-μετρήσιμη $\Leftrightarrow$ το E είναι Lebesgue μετρήσιμο.

<u>Αποδ.:</u>



Έστω $b \in \mathbb{R}$.

- Αν $b \geq 1$, τότε $f^{-1}((-\infty, b]) = \{x \in X : \chi_E(x) \leq b\}$
  $= \{x \in X : \chi_E(x) \leq 1\} = X \in \mathcal{A}$.
- Αν $b \in [0,1)$, τότε $f^{-1}((-\infty, b]) = \{x \in X : \chi_E(x) \leq b\}$

$= \{x \in X : \chi_E(x) \leq 0\} = E^c \in \mathcal{A}.$

- Αν $b < 0$, τότε $f^{-1}((-\infty, b]) = \{x \in X : \chi_E(x) \leq b\}$

$= \emptyset \in \mathcal{A}.$

$\blacksquare$