→ $\boxed{\text{Πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων}}$

→ <u>Πρόταση</u>: Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, και
(σ-άλγεβρα)

$f, g : (X, \mathcal{A}) \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες. Τότε:

$$\{f<g\} \in \mathcal{A}, \quad \{f \leq g\} \in \mathcal{A}, \quad \{f=g\} \in \mathcal{A}.$$

<u>Απόδειξη</u>:

- $\{f<g\} = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$

$$= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\{x \in X : f(x) < q_n < g(x)\}}_{= \{f<q_n\} \cap \{g>q_n\}},$$

υπάρχει ρητός q_n μεταξύ των $f(x), g(x)$
$\Leftarrow f(x) \leq g(x)$

όπου $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{f<q_n\}, \{g>q_n\} \in \mathcal{A} \Rightarrow \{f<q_n\} \cap \{g>q_n\} \in \mathcal{A}$

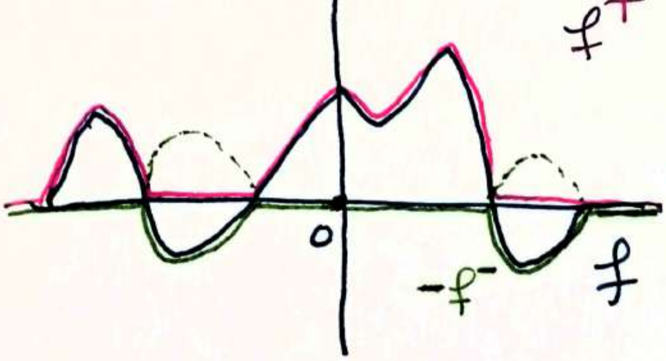
$\Rightarrow \{f<g\} \in \mathcal{A}.$

- $\{f \leq g\} = \{g<f\}^c \in \mathcal{A}.$

- $\{f=g\} = \underbrace{\{f \leq g\}}_{\in \mathcal{A}} \setminus \underbrace{\{f<g\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$

→ **Πρόταση:** Έστω $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες, και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε, οι εξής συναρτήσεις είναι μετρήσιμες:

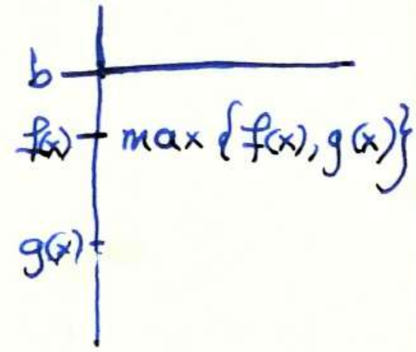
- $\max\{f, g\}$ (όπου $\max\{f,g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ $\forall x \in X$).
- $\min\{f, g\}$ (όπου $\min\{f,g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\}$ $\forall x \in X$).
- $\alpha \cdot f$
- $f + g$
- f^2
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g}$ (αν $g(x) \neq 0$ $\forall x \in X$).
- $f^+ := \max\{f, 0\}$



- $f^- := -\min\{f, 0\}$
- $|f|$

⚠ $|f| = f^+ + f^-$, $f = f^+ - f^-$.

Απόδειξη:



- Έστω $b \in \mathbb{R}$. ΘΔΟ: $\{\max\{f,g\} \leq b\} \in \mathcal{A}$.

Παρατηρούμε ότι

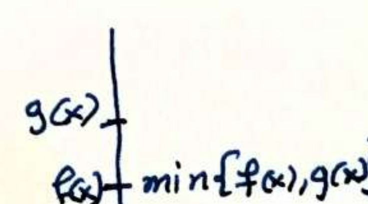
$$\{\max\{f,g\} \leq b\} = \{x \in X : \max\{f(x), g(x)\} \leq b\}.$$

$$\forall x \in X, \quad \max\{f(x), g(x)\} \leq b \iff f(x) \leq b \ \underline{\text{και}} \ g(x) \leq b.$$

$$\iff x \in \{f \leq b\} \cap \{g \leq b\}.$$

Άρα, $\{\max\{f,g\} \leq b\} = \underbrace{\{f \leq b\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{g \leq b\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

(f, g μετρήσιμες)



- ΘΔΟ: $\forall b \in \mathbb{R}$, $\{\min\{f,g\} \geq b\} \in \mathcal{A}$.

Έστω $b \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι, $\forall x \in X$,

$$\min\{f(x), g(x)\} \geq b \iff f(x) \geq b \text{ και } g(x) \geq b$$

$$\iff x \in \{f \geq b\} \cap \{g \geq b\}.$$

Άρα, $\{\min\{f,g\} \geq b\} = \{x \in X : \min\{f(x), g(x)\} \geq b\}$

$$= \underbrace{\{f \geq b\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{g \geq b\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

• $\boxed{\alpha \cdot f \text{ μετρήσιμη}}$:

⇝ Αν $\alpha = 0$, τότε $\alpha \cdot f = 0$, και:

$$\forall b \in \mathbb{R}, \ \{\underbrace{\alpha \cdot f}_{\overset{\shortparallel}{0}} \le b\} = \{x \in X : 0 \le b\} = \begin{cases} \emptyset, & b < 0 \\ X, & b \geq 0 \end{cases} \in \mathcal{A}.$$

⇝ Αν $\alpha \neq 0$, τότε: Έστω $b \in \mathbb{R}$.

$$\{\alpha \cdot f \le b\} = \{f \le \tfrac{b}{\alpha}\} \in \mathcal{A}.$$

• $\boxed{f+g \text{ μετρήσιμη}}$: Έστω $b \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\{f+g < b\} = \{f < b-g\} = \{x \in X : f(x) < b - g(x)\}.$$

$\forall x \in X$, ισχύει ότι $f(x) < b - g(x) \iff$ υπάρχει ρητός $q \in \mathbb{Q}$: $f(x) < q < b - g(x)$.

Άρα, $\{f+g < b\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\{x \in X : f(x) < q_n < b - g(x)\}}_{\overset{\shortparallel}{\{f < q_n\} \cap \{q_n < b+g\}}}$

$\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\{f < q_n\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{g > q_n - b\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

• $\boxed{f^2 \text{ μετρήσιμη}}$: Έστω $b \in \mathbb{R}$.

⇝ Αν $b<0$, τότε το $\{f^2 \le b\} = \emptyset \in \mathcal{A}$.

⇝ Αν $b \geq 0$, τότε το $\{f^2 \le b\} = \{-\sqrt{b} \le f \le \sqrt{b}\}$

$$= \underbrace{\{f \geq -\sqrt{b}\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{f \le \sqrt{b}\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

• $\boxed{f \cdot g \text{ μετρήσιμη}}$:

$$(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2 \Rightarrow f \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right).$$

Αφού f, g μετρήσιμες, από τα προηγούμενα ξέρουμε

ότι: $(f+g)^2$, $-f^2$, $-g^2$ μετρήσιμες

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left((f+g)^2 + (-f^2) + (-g^2)\right)}_{\overset{\shortparallel}{f \cdot g}} \text{ μετρήσιμη.}$$

• $\boxed{\frac{f}{g} \text{ μετρήσιμη}}$: Η $\frac{1}{g}$ είναι μετρήσιμη, καθώς,

⇝ $\forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\{\frac{1}{g} \le b\} = \{g \geq \frac{1}{b}\} \in \mathcal{A}$,

⇝ για $b=0$, $\{\frac{1}{g} \le b\} = \{\frac{1}{g} \le 0\} = \{g \le 0\} \in \mathcal{A}$.

Αφού οι $f, \frac{1}{g}$ είναι μετρήσιμες, από τα προηγούμενα ξέρουμε ότι και η $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$ είναι επίσης μετρήσιμη.

- Η $f^+ = \max\{f, 0\}$ είναι μετρήσιμη, καθώς οι $f, 0$ είναι μετρήσιμες.

- Η $f^- = -\min\{f, 0\}$ είναι μετρήσιμη, καθώς $\min\{f, 0\}$ μετρήσιμη.

  (Ή: $f = f^+ - f^- \Rightarrow f^- = f^+ - f = \underbrace{f^+ + (-f)}_{\text{μετρήσιμες}}$.)

- $|f| = \underbrace{f^+ + f^-}_{\text{μετρήσιμες}} \longrightarrow |f|$ μετρήσιμη.

■

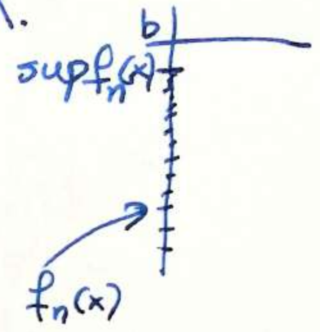
→ <u>Πρόταση:</u> Έστω $f_n : (X, \mathcal{A}) \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε:

(a) Οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.

(b) Οι συναρτήσεις $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.

(c) Αν $f_n \to f$ κατά σημείο (δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in X$), τότε η f είναι μετρήσιμη.

<u>Απόδειξη</u>: (α) Έστω $b \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in X$.



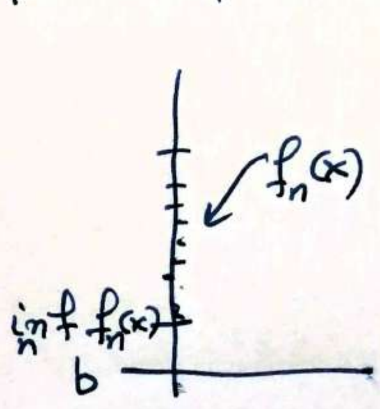
Ξέρουμε ότι $\sup_n f_n(x) \le b$

$\iff f_n(x) \le b \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα,
$$\{\sup_n f_n \le b\} = \{x \in X : \sup_n f_n(x) \le b\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in X : f_n(x) \le b\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\{f_n \le b\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

Άρα, η $\sup_n f_n$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Τώρα για την $\inf_n f_n$:



Έστω $b \in \mathbb{R}$. $\forall x \in X$,

$\inf_n f_n(x) \ge b \iff f_n(x) \ge b \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα, $\{\inf_n f_n \ge b\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overbrace{\{f_n \ge b\}}^{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$.

(b) • $\limsup_n f_n(x) = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\left(\sup_{n\geq k} f_n(x)\right)}_{\substack{\text{φθίνουσα}\\ \text{ως προς } k}}$

$$= \inf_{k\to+\infty}\left(\sup_{n\geq k} f_n(x)\right).$$

Η $\sup_{n\geq k} f_n$ είναι μετρήσιμη $\forall k\in\mathbb{N}$, ως supremum μετρησίμων συναρτήσεων. Άρα, η $\limsup_n f_n$ είναι μετρήσιμη, ως infimum μετρησίμων.

• $\liminf_n f_n(x) = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\left(\inf_{n\geq k} f_n(x)\right)}_{\substack{\text{αύξουσα}\\ \text{ως προς } k}}$

$$= \sup_k\left(\inf_{n\geq k} f_n(x)\right).$$

Η $\inf_{n\geq k} f_n$ είναι μετρήσιμη $\forall k\in\mathbb{N}$, ως infimum μετρήσιμων συναρτήσεων. Άρα, η $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμη, ως supremum μετρήσιμων συναρτήσεων.

(c) Αν $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο, τότε

$\forall x \in X, \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$

δηλαδή $f = \limsup_n f_n$, και άρα η f είναι μετρήσιμη.

■

⚠ Αργότερα θα ορίσουμε ολοκλήρωμα $\int f d\mu$ για <u>κάθε</u> μη αρνητική μετρήσιμη $f: (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow [0, +\infty]$, και επίσης για κάθε $f: (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη με $\int f^+ d\mu < +\infty$ ή $\int f^- d\mu < +\infty$.

Εν τέλει, όλα τα παραπάνω σημαίνουν πως, αν μπορούμε να μιλάμε για τα $\int f d\mu$, $\int g d\mu$, δηλ. οι f, g είναι μετρήσιμες, τότε μπορούμε να μιλάμε για το $\int (\lambda_1 f + \lambda_2 g) d\mu$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, για το $\int f \cdot g \, d\mu$, κοκ (υπό τη συνθήκη ότι κάθε συνάρτηση h από τις παραπάνω ικανοποιεί ότι $\int h^+ d\mu < +\infty$ ή $\int h^- d\mu < +\infty$).

Τώρα ορίζουμε τις απλές συναρτήσεις. Για αυτές θα οριστεί εύκολα το ολοκλήρωμα. Μετά, θα δείξουμε πως κάθε μετρήσιμη $f:(X,\mathcal{A},\mu)\to[0,+\infty]$ προσεγγίζεται από απλές συναρτήσεις s_n, και άρα το $\int f\,d\mu$ θα ορίζεται ως το $\lim\limits_{n\to+\infty}\int s_n\,d\mu$.

→ Ορισμός (απλή συνάρτηση): Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μία συνάρτηση $s:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{R}$ λέγεται απλή αν είναι ① μετρήσιμη και ② έχει πεπερασμένο σύνολο τιμών.

Έστω $s:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{R}$ απλή, με σύνολο τιμών $s(X)=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ (για κάποιο $n\in\mathbb{N}$).

Τότε, $a_i\in\mathbb{R}$ $\forall i=1,\dots,n$, και το

$$A_i := \{s=a_i\} = s^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{A} \quad \text{(αφού } s \text{ μετρήσιμη).}$$

Επίσης, τα $A_1,\dots,A_n$ είναι ξένα και $A_1\cup\dots\cup A_n=X$ (δηλαδή, αποτελούν διαμέριση του X). Άρα, παρατηρούμε ότι

$$s(x)=\begin{cases} a_1, & x\in A_1\\ \vdots & \\ a_n, & x\in A_n\end{cases} = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\chi_{A_i}(x).$$

Αποκαλούμε την αναπαράσταση $s=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ της s την κανονική μορφή της s.

⚠ Μια απλή s γράφεται με πολλούς άλλους τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων συνόλων (όπου τα σύνολα μπορεί να μην είναι και ξένα).

Παρατήρηση: Μια $s:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{R}$ είναι απλή

$$\Longleftrightarrow$$

υπάρχουν $B_1,\dots,B_m\in\mathcal{A}$ και $b_1,\dots,b_m\in\mathbb{R}$ ώστε

$$s=\sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{B_k}$$

(δηλ., μία συνάρτηση είναι απλή $\Longleftrightarrow$ είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων (συνόλων στην $\mathcal{A}$)).

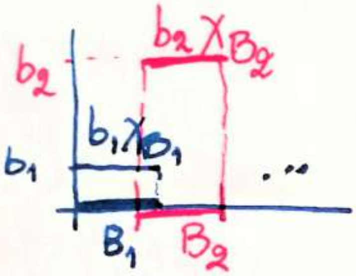
Απόδειξη: ($\Longrightarrow$) Έστω s απλή. Τότε, η s έχει μία κανονική μορφή $s=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$, όπου τα $A_i\in\mathcal{A}$ και τα $a_i\in\mathbb{R}$.

($\Longleftarrow$) Έστω $s=\sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{B_k}$, για κάποια $B_k\in\mathcal{A}$ και κάποια $b_k\in\mathbb{R}$.

Τότε, το σύνολο τιμών της s είναι πεπερασμένο (και άρα η s είναι απλή). Πράγματι,

$$\forall x\in X,\quad s(x)=\sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{B_k}(x)=\sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\}:\\ x\in B_k}} b_k .$$

Άρα, $s(X)\subseteq \left\{ \sum_{k\in J} b_k \;:\; J\subseteq\{1,\dots,m\}\right\}$,



που είναι πεπερασμένο σύνολο. ■

⚠ Το παραπάνω σημαίνει ότι, για κάθε συνάρτηση της μορφής $\sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{B_k}$, όπου τα $B_k\in\mathcal{A}$ και τα $b_k\in\mathbb{R}$, υπάρχουν ξένα $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{A}$ και $a_i\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{B_k}=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$$

(& η συνάρτηση αριστερά είναι απλή, και άρα έχει κάποια κανονική μορφή).

⚠ Από το παραπάνω προκύπτει ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί απλών συναρτήσεων είναι επίσης απλές συναρτήσεις (καθώς παραμένουν γραμμικοί συνδυασμοί χαρα-

χαρακτηριστικών συνόλων της $\mathcal{A}$).

Τώρα θα δούμε ότι κάθε μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση προσεγγίζεται από αύξουσα ακολουθία απλών.

→ Θεώρημα (προσέγγιση μη αρνητικής μετρήσιμης συνάρτησης από απλές):

Έστω $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ από απλές συναρτήσεις $s_n : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$, με

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \ldots \leq f \text{ , ώστε}$$

$$s_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f \text{ κατά σημείο}$$

(δηλ. $s_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ $\forall x \in X$).

Αν επιπλέον η f είναι φραγμένη, τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, δηλαδή

$$\| s_n - f \|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(όπου $\| s_n - f \|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |s_n(x) - f(x)|$).

→ <u>Λήμμα:</u> Έστω $f:(X,\mathcal{A}) \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη.

Θεωρούμε μία διαμέριση $\mathcal{P} = \{ \underset{0}{\overset{\shortparallel}{a_0}} < a_1 < a_2 < \dots < a_n < +\infty \}$

του $[0,+\infty]$. Ορίζουμε:

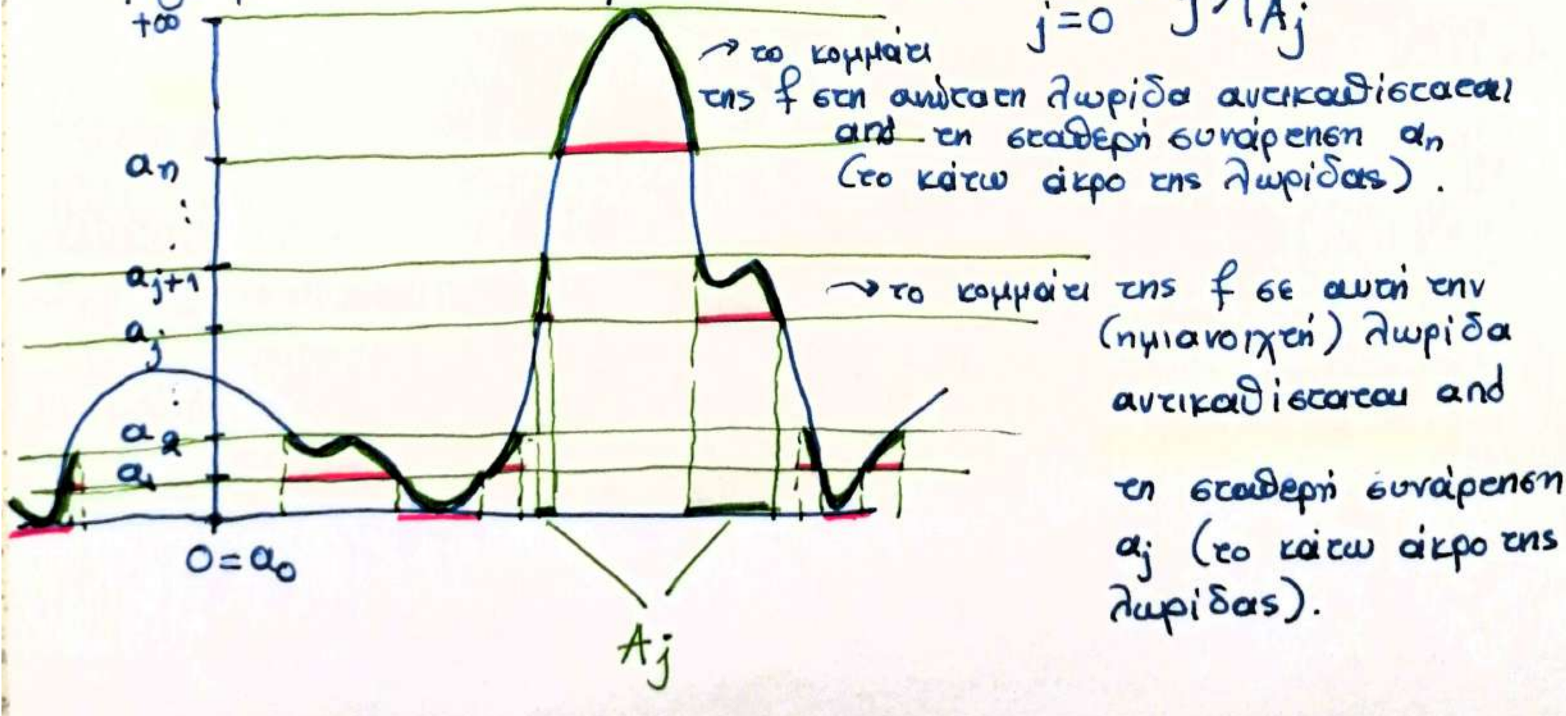
$$A_j := \{x \in X : a_j \le f(x) < a_{j+1}\} = f^{-1}([a_j, a_{j+1})) \quad , \forall j = 0,1,\dots,n-1,$$

και

$$A_n := \{x \in X : f(x) \ge a_n\} = f^{-1}([a_n, +\infty]).$$

(Παρατηρούμε ότι τα $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, είναι ξένα, και διαμερίζουν τον X).

Ορίζουμε τη συνάρτηση $s^{\mathcal{P}} := \sum_{j=0}^{n} a_j \chi_{A_j}$.



Τότε, ισχύουν τα εξής:

(1) <u>Η $s^{\mathcal{P}}$ είναι απλή</u> (αφού είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων συνόλων της $\mathcal{A}$).

(2) $0 \leq s^P \leq f$: Πράγματι, $s = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{A_i}$, όπου

κάθε $a_i \geq 0 \Longrightarrow s \geq 0$.

Επίσης, $\forall x \in X$, $s^P(x) \leq f(x)$. Πράγματι: Έστω $x \in X$. Αφού $X = \coprod_{i=0}^{n} A_i$, το x ανήκει σε κάποιο μοναδικό από τα A_i.

- Αν $x \in A_i$ για κάποιο $i = 0, 1, \ldots, n-1$,

  τότε $a_i \leq f(x) < a_{i+1}$, ενώ

  $$s^P(x) = a_i$$

  Άρα, $s^P(x) \leq f(x)$.

- Αν $x \in A_n$, τότε $f(x) \geq a_n$, ενώ
  $$s^P(x) = a_n.$$

  Άρα, $s^P(x) \leq f(x)$.

(3) Αν $f(x) \leq a_n$, τότε

$0 \leq f(x) - s^P(x) \leq |a_{j+1} - a_j|$, όπου j είναι ο δείκτης στο $\{0, \ldots, n-1\}$ ώστε $x \in A_j$

$s^P \leq f$

στο A_j, $s^P = a_j$ ενώ $a_j \leq f < a_{j+1}$

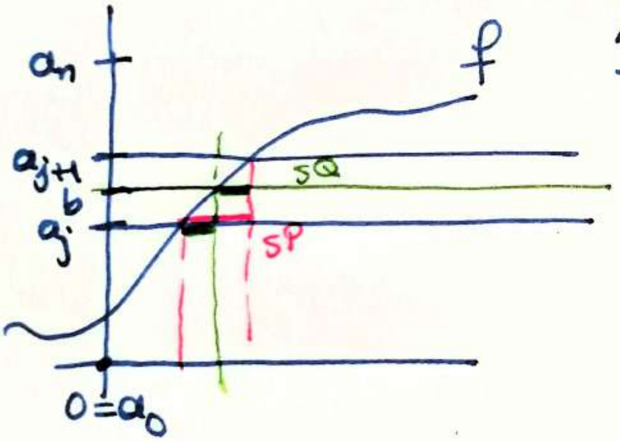
$\leq \max\{|a_{i+1} - a_i| : i = 0, \ldots, n-1\}$

$= \|\mathcal{P}\|$, το πλάτος της διαμέρισης $\mathcal{P}$.

(4) Έστω Q διαμέριση του $[0,+\infty]$ (από πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία του $\mathbb{R}$), με $P \subseteq Q$. Τότε, $s^P \leq s^Q$.

δηλ., $0 \leq s^P \leq s^Q \leq f$: η s^Q είναι πιο κοντά στην f απ' ότι η s^P.

Αυτό θα δειχθεί με επαγωγή στον $\#(Q \setminus P)$. Άρα, αρκεί να δειχθεί για την περίπτωση που $Q = P \cup \{b\}$, για κάποιο $b \notin P$.



1η περίπτωση: $b < a_n$.

Τότε, υπάρχει μοναδικό $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ώστε $b \in [a_j, a_{j+1})$.

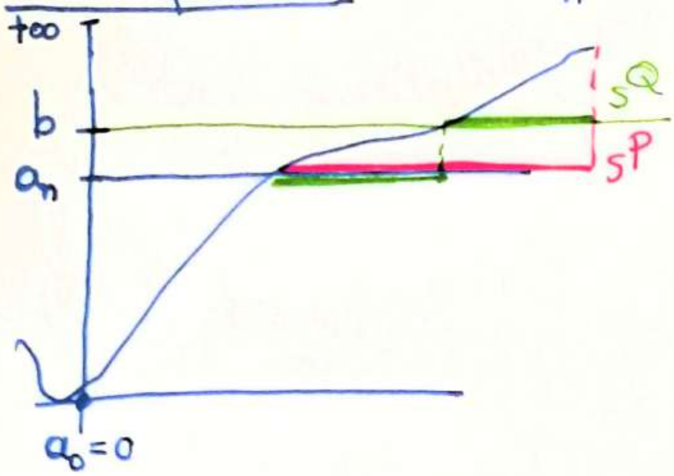
Στα $A_0, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_n$, $s^P = s^Q$.

Στο $A_j = f^{-1}([a_j, a_{j+1}))$, η s^P ισούται με a_j, ενώ η s^Q ισούται με a_j στο $A_{j,1} := f^{-1}([a_j, b))$, και με b στο $A_{j,2} := f^{-1}([b, a_{j+1}))$.

Άρα, $s^P \leq s^Q$ στο A_j.

Οπότε, $s^P \leq s^Q$.

<u>2η περίπτωση:</u> $b \geq a_n$.



Τότε, στα $A_0, \dots, A_{n-1}$,
$s^P = s^Q$.

Στο A_n:

$s^P = a_n$, ενώ

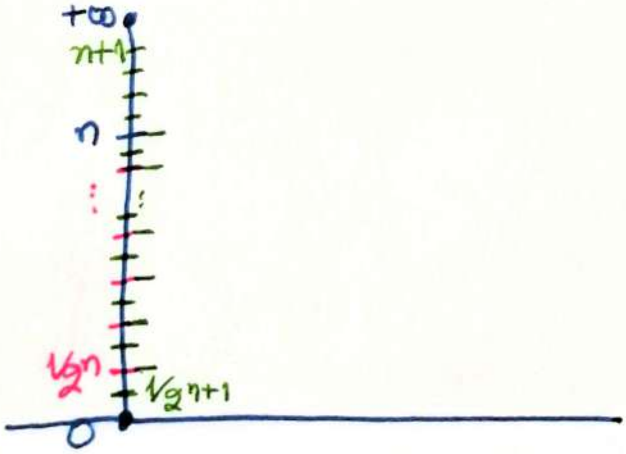
$s^Q = a_n$ στο $A_{n,1} := f^{-1}\big([a_n, b)\big)$,

$s^Q = b$ στο $A_{n,2} := f^{-1}\big([b, +\infty]\big)$.

Άρα, και πάλι $s^P \leq s^Q$.

■

<u>Απόδειξη του Θεωρήματος:</u> Έστω $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη. $\forall n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τη διαμέριση



$$\mathcal{P}_n := \left\{ \underset{0}{\underset{\parallel}{a_0}} < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \frac{3}{2^n} < \dots < \frac{n \cdot 2^n - 1}{2^n} < n \right\}$$

του $[0, n]$

από διαδοχικά σημεία σε απόσταση $\frac{1}{2^n}$ το καθένα από το προηγούμενο.

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Από το Λήμμα,

η ακολουθία $\left(s^{\mathcal{P}_n}\right)_{n=1}^{+\infty}$ είναι ακολουθία απλών συναρτήσεων, με $0 \leq s^{\mathcal{P}_1} \leq s^{\mathcal{P}_2} \leq \dots \leq s^{\mathcal{P}_n} \leq s^{\mathcal{P}_{n+1}} \leq \dots \leq f$.

Απομένει ΝΔΟ $s^{\mathcal{P}_n} \longrightarrow f$ κ.σ.,

και δη, αν η f είναι φραγμένη, τότε $\|s^{\mathcal{P}_n} - f\|_\infty \longrightarrow 0$.

Πράγματι:

$$\boxed{s^{\mathcal{P}_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \quad \text{κ.σ.:}}$$

Έστω $x \in X \Longrightarrow \quad f(x) \in [0, +\infty]$.

- Αν $f(x) \in \mathbb{R}$, τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ f(x) \leq n_0$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \leq \underbrace{n}_{\substack{\text{τα άνω}\\ \text{άκρα των διαμε-}\\ \text{ρίσεων } \mathcal{P}_n}}, \qquad \forall n \geq n_0$$

$$\overset{\text{Λήμμα}}{\Longrightarrow} \quad 0 \leq f(x) - s^{\mathcal{P}_n}(x) \leq \|\mathcal{P}_n\| = \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq n_0$$

$$0 \xleftarrow{n\to+\infty} \cdots \qquad \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

$$\Longrightarrow \quad s^{\mathcal{P}_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

- Αν $f(x) = +\infty$, τότε $x \in \{f \geq n\} = f^{-1}\big([n, +\infty]\big)$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

άρα $s^{\mathcal{P}_n}(x) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\longrightarrow \quad s^{\mathcal{P}_n}(x) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty = f(x).$$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{Αν } f \text{ φραγμένη, τότε } \|s^{P_n} - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$:

Αν η f είναι φραγμένη, τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall x \in X$: $f(x) \leq n_0$

$$\rightarrow \quad f(x) \leq n, \quad \forall n \geq n_0$$

$$\xrightarrow{\text{Λήμμα}} \quad 0 \leq f(x) - s^{P_n}(x) \leq \|P_n\| = \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Αφού αυτό ισχύει $\forall x \in X$, έχουμε ότι

$$\| f - s^{P_n} \|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \qquad \forall n \geq n_0,$$

και άρα $\| s^{P_n} - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

■