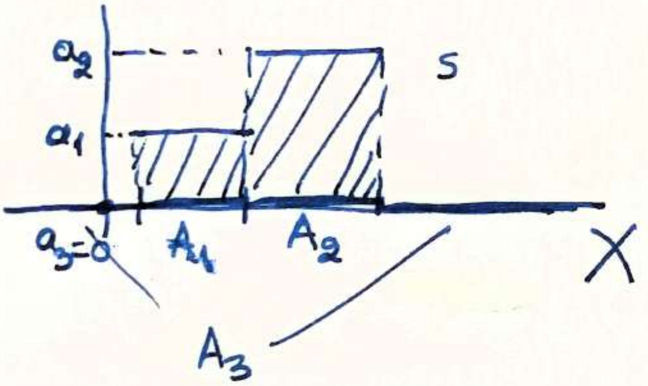
(I) Ολοκλήρωμα για <u>μη αρνητικές</u> <u>απλές</u> συναρτήσεις

→ <u>Ορισμός</u> (για απλές ≥ 0): Έστω $s:(X,\mathcal{A},\mu)\to[0,+\infty)$ απλή συνάρτηση, με κανονική μορφή $s=\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$.

Ορίζουμε $$\int s\,d\mu := \sum_{j=1} a_j\cdot\mu(A_j)$$

(όπου συμφωνούμε πως, αν κάποιο $a_j=0$, τότε $a_j\cdot\mu(A_j)=0$, ακόμα και αν $\mu(A_j)=+\infty$).



<u>πχ.</u>: Για την s του σχήματος,
$$\int s\,d\mu = a_1\cdot\mu(A_1)+a_2\cdot\mu(A_2)+\cancel{a_3\,\mu(A_3)}^{\,0}.$$

⚠ Το ολοκλήρωμα που ορίζουμε από εδώ και στο εξής είναι το <u>ολοκλήρωμα κατά Lebesgue</u> (σε αντίθεση με το ολοκλήρωμα κατά Riemann). Το ολοκλήρωμα $\int s\,d\mu$ στο χώρο X λέγεται ολοκλήρωμα Lebesgue (παρότι ο (X,μ) δεν είναι ο $(\mathbb{R},\lambda)$), επειδή ο Lebesgue το όρισε.

⚠ Επειδή η s στον παραπάνω ορισμό είναι απλή, τα $A_j\in\mathcal{A}$, άρα τα $\mu(A_j)$ υπάρχουν. Επίσης, τα a_j είναι όλα ≥ 0 (λόγω της κανονικής μορφής).

Παραδείγματα:

① Έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε, $\int \chi_A \, d\mu = \mu(A)$.

Πράγματι, η χ_A είναι απλή συνάρτηση, μη αρνητική, με κανονική μορφή $1 \cdot \chi_A + 0 \cdot \chi_{A^c}$

$$\Rightarrow \int \chi_A \, d\mu = 1 \cdot \mu(A) + \cancel{0 \cdot \mu(A^c)}^{\,0} = \mu(A).$$

② Η συνάρτηση Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Άρα, $f = \chi_{\mathbb{Q}}$. Οπότε, $\int f \, d\lambda = \int \chi_{\mathbb{Q}} \, d\lambda =$

$$= \mu(\mathbb{Q}) = 0.$$

(Ή: η f είναι απλή ≥ 0, που παίρνει τις τιμές 0 και 1. Άρα,

$$\int f \, d\mu = 1 \cdot \mu(\{f = 1\}) + 0 \cdot \mu(\{f = 0\})$$

$$= 1 \cdot \mu(\mathbb{Q}) + 0 \cdot \mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

$$= 1 \cdot 0 + 0 = 0.$$

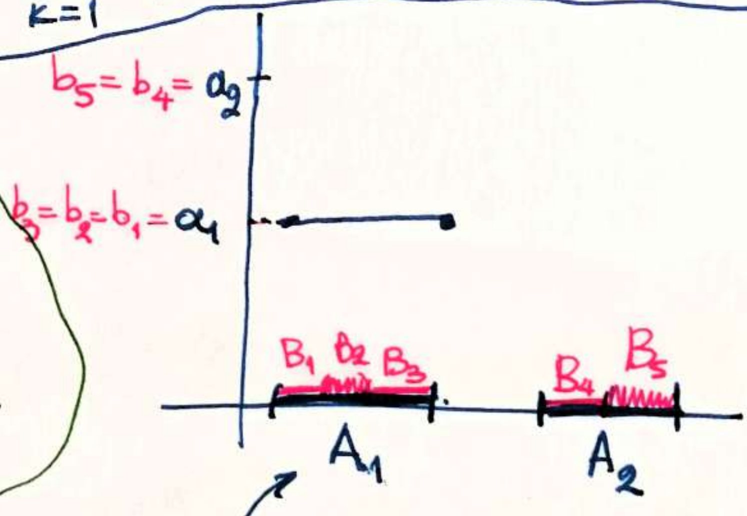
Τώρα θέλουμε να δείξουμε πως, στο σύνολο των μη αρνητικών απλών συναρτήσεων, το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι γραμμικό και μονότονο (όπως αναμένουμε για μία φυσιολογική έννοια "εμβαδού" κάτω από το γράφημα).

Σε αυτό θα βοηθήσει το εξής:

→ Λήμμα: Έστω $s=\sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}$, όπου τα B_k είναι ξένα, $B_k \in \mathcal{A}$ $\forall k=1,\dots,m$, $b_k \in [0,+\infty)$ $\forall k=1,\dots,m$. Τότε,

$$\int s\,d\mu = \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \mu(B_k).$$

Παρότι τα B_k είναι ξένα, δεν αποτελούν διαμέριση του X αναγκαστικά. Και μπορεί κάποια b_i, b_j, με $i \neq j$, να είναι ίσα. Άρα, αυτή δεν είναι αναγκαστικά η κανονική μορφή $s=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{\{s=a_i\}}$ της s.



Π.χ.: $s = a_1\cdot\chi_{A_1} + a_2\cdot\chi_{A_2} + 0\cdot\chi_{(A_1\cup A_2)^c}$, η κανονική μορφή της s.

<u>Απόδειξη:</u> Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $B_1, \dots, B_m$ διαμερίζουν τον X (καθώς, αν όχι, ορίζουμε $b_{m+1} = 0$ και $B_{m+1} = X \setminus (B_1 \amalg \dots \amalg B_m)$, και δουλεύουμε με την αναπαράσταση $\sum_{k=1}^{m+1} b_k \chi_{B_k}$ της s).

Τότε, $X = \coprod_{k=1}^{m} B_k \Rightarrow \forall j = 1, \dots, n,\ A_j = \coprod_{k=1}^{m} (A_j \cap B_k)$.

Επίσης, $X = \coprod_{j=1}^{n} A_j \Rightarrow \forall k = 1, \dots, m,\ B_k = \coprod_{j=1}^{n} (B_k \cap A_j)$.

Οπότε, $\int s \, d\mu \underset{\text{ορισμός}}{=\!=\!=} \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j)$

προσθετικότητα

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \sum_{k=1}^{m} \mu(A_j \cap B_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \mu(A_j \cap B_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_k \cdot \mu(A_j \cap B_k)$$

Αν $A_j \cap B_k \neq \emptyset$, τότε $a_j = b_k$.
Αν $A_j \cap B_k = \emptyset$, τότε $\mu(A_j \cap B_k) = 0$ άρα $a_j \cdot \mu(A_j \cap B_k) = 0 = b_k \cdot \mu(A_j \cap B_k)$

$$= \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap B_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \mu(B_k).$$

προσθετικότητα

∎

<u>Πρόταση</u> (Ιδιότητες ολοκληρώματος για απλές, μη αρνητικές s):

Έστω $s,t:(X,\mathcal{A},\mu)\longrightarrow[0,+\infty)$ απλές. Τότε:

(i) $\forall \alpha\geq 0,\quad \int \alpha\cdot s\,d\mu=\alpha\cdot\int s\,d\mu.$

(ii) $\int(s+t)\,d\mu=\int s\,d\mu+\int t\,d\mu.$

(iii) Αν $s\leq t$ στο X, τότε $\int s\,d\mu\leq\int t\,d\mu.$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $s=\sum_{j=1}^{n}a_j\chi_{A_j}$, $t=\sum_{k=1}^{m}b_k\chi_{B_k}$

οι κανονικές μορφές των s και t.

(i) $\alpha\cdot s=\sum_{j=1}^{n}\alpha\cdot a_j\cdot\chi_{A_j}$, όπου τα A_j είναι ξένα στην $\mathcal{A}$

$$\xRightarrow{\text{Λήμμα}}\int\alpha\cdot s\,d\mu=\sum_{j=1}^{n}\alpha\cdot a_j\,\mu(A_j)=\alpha\cdot\sum_{j=1}^{n}a_j\,\mu(A_j)=\alpha\cdot\int s\,d\mu.$$

Για τα (ii), (iii):

$$\forall j=1,\dots,n,\quad A_j=\coprod_{k=1}^{m}(A_j\cap B_k),$$

και $\forall k=1,\dots,m,\quad B_k=\coprod_{j=1}^{n}(B_k\cap A_j).$

Άρα, $$s=\sum_{j=1}^{n}a_j\chi_{A_j}\;\underset{\chi_{A_j}=\sum_{k=1}^{m}\chi_{A_j\cap B_k}}{=\!=\!=\!=}\;\sum_{j=1}^{n}a_j\cdot\sum_{k=1}^{m}\chi_{A_j\cap B_k}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_j\cdot\chi_{A_j\cap B_k},\quad\text{και}$$

$$t = \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \chi_{B_k} \xlongequal[\chi_{B_k} = \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_k \cap A_j}]{} \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \sum_{j=1}^{n} \chi_{B_k \cap A_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \chi_{A_j \cap B_k}.$$

(ii) Από τα παραπάνω, αφού τα $A_j \cap B_k$ είναι ξένα, λόγω του Λήμματος έχουμε ότι

$$s+t = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \chi_{A_j \cap B_k} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int (s+t)\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \cdot \mu(A_j \cap B_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j\, \mu(A_j \cap B_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k\, \mu(A_j \cap B_k)$$

$$\overset{\text{Λήμμα}}{=} \int s\, d\mu + \int t\, d\mu.$$

(iii)

Σε κάθε $A_j \cap B_k$ που είναι μη κενό, η s ισούται με a_j και η t ισούται με b_k. Αφού $s \leq t$, προκύπτει ότι $a_j \leq b_k$ για κάθε (j,k) ώστε $A_j \cap B_k \neq \emptyset$.

Άρα, $\int s\,d\mu = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j \; \mu(A_j \cap B_k)$

$$= \sum_{(j,k):A_j\cap B_k\neq\emptyset} \overset{\leq b_k}{a_j} \cdot \mu(A_j\cap B_k)$$

$$\leq \sum_{(j,k):A_j\cap B_k\neq\emptyset} b_k \; \mu(A_j\cap B_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \mu(A_j\cap B_k)$$

$$= \int t\,d\mu.$$

■

⚠ Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, αν $s = \sum_{j=1}^{n} \overset{\geq 0}{a_j} \chi_{A_j}$,

τότε $\int s\,d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j)$,

<u>ακόμα και αν τα A_j δεν είναι ξένα.</u>

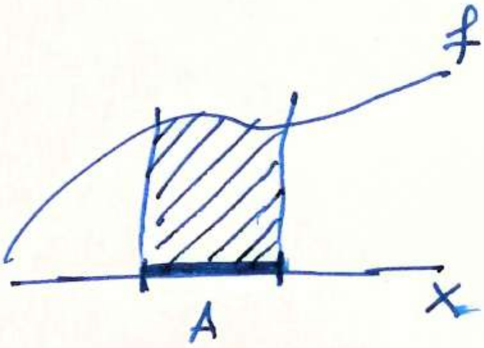
Πράγματι, το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό στο χώρο των μη αρνητικών, απλών συναρτήσεων. Αφού κάθε χ_{A_j} είναι μη αρνητική απλή, και $a_j \geq 0 \;\forall j$, έχουμε ότι $\int s\,d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \int \chi_{A_j} d\mu$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \mu(A_j).$$

II) Ολοκλήρωμα για μη αρνητικές, μετρήσιμες συναρτήσεις.

→ <u>Ορισμός:</u> Έστω $f:(X,\mathcal{A},\mu)\to[0,+\infty]$ μετρήσιμη.
Ορίζουμε $\int f\,d\mu := \sup\left\{\int s\,d\mu : 0\leq s\leq f,\ s \text{ απλή}\right\}$.

Επίσης, $\forall A\in\mathcal{A}$, ορίζουμε
$$\int_A f\,d\mu := \int f\cdot\chi_A\,d\mu.$$



⚠ Αν η s είναι απλή, τότε ο παραπάνω ορισμός συμφωνεί με αυτόν που έχουμε ήδη δώσει (το supremum είναι maximum).

→ <u>Πρόταση</u> (Ιδιότητες ολοκληρώματος για μη αρνητικές, μετρήσιμες συναρτήσεις):

Έστω $f,g:(X,\mathcal{A},\mu)\to[0,+\infty]$ μετρήσιμες και $\alpha\geq 0$.

(i) $\int \alpha\cdot f\,d\mu = \alpha\cdot\int f\,d\mu$.

(ii) Αν $f\leq g$ στο X, τότε $\int f\,d\mu\leq\int g\,d\mu$.

(iii) Αν $A\subseteq B$, τότε $\int_A f\,d\mu\leq\int_B f\,d\mu$.

(iv) Αν $\mu(A)=0$ ή $f=0$ στο A, τότε $\int_A f\,d\mu=0$.

(v) $\int(f+g)\,d\mu=\int f\,d\mu+\int g\,d\mu$.

Απόδειξη:

(i) $\int \alpha\cdot f\, d\mu = \sup\{\int s\, d\mu : 0\le s\le \alpha\cdot f,\ s \text{ απλή}\}$.

⇝ Αν $\alpha\ne 0$: $0\le s\le \alpha\cdot f \Longleftrightarrow 0\le \frac{s}{\alpha}\le f$,

s απλή $\Longleftrightarrow \frac{s}{\alpha}$ απλή,

$\int s\, d\mu = \alpha\cdot \int \frac{s}{\alpha}\, d\mu$.

Άρα, $\sup\{\int s\, d\mu : 0\le s\le \alpha f,\ s \text{ απλή}\}$

$= \sup\{\alpha \int \frac{s}{\alpha}\, d\mu : 0\le \frac{s}{\alpha}\le f,\ \frac{s}{\alpha} \text{ απλή}\}$

$= \alpha\cdot \sup\{\int t\, d\mu : 0\le t\le f,\ t \text{ απλή}\}$

$= \alpha\cdot \int f\, d\mu$.

⇝ Αν $\alpha=0$, τότε $\int \underbrace{\alpha\cdot f}_{=0}\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0\cdot \mu(X)$

$= 0 = \underset{\alpha}{0}\cdot \int f\, d\mu$.

(ii) $\int f\, d\mu = \sup\{\int s\, d\mu : 0\le s\le f,\ s \text{ απλή}\}$.

Για κάθε s απλή με $0\le s\le f$, έχουμε και ότι $0\le s\le g$. Άρα, $\int s\, d\mu \le \int g\, d\mu$ $(= \sup\{\int t\, d\mu : 0\le t\le g,\ t \text{ απλή}\})$.

Οπότε, $\underbrace{\sup\{\int s\, d\mu : 0\le s\le f,\ s \text{ απλή}\}}_{=\int f\, d\mu} \le \int g\, d\mu$

(iii) Αν $A \subseteq B$, τότε $\chi_A \leq \chi_B \underset{f\geq 0}{\Longrightarrow} f\chi_A \leq f\chi_B$

$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \int f\chi_A \, d\mu \leq \int f\chi_B \, d\mu$, δηλαδή

$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

(iv) $\rightsquigarrow$ Αν $f=0$ στο A, τότε $f \cdot \chi_A = 0$,

άρα $\int_A f d\mu = \int \underbrace{f\chi_A}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ στο } X} d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0$.

$\rightsquigarrow$ Αν $\mu(A)=0$:

$\int_A f d\mu = \int f\chi_A \, d\mu = \sup\{ \int s \, d\mu : 0 \leq s \leq f\chi_A, s \text{ απλή} \}$.

Έστω s απλή με $0 \leq s \leq f$.
Αφού $f\chi_A = 0$ εκτός του A, έχουμε ότι

η s ισούται με 0 εκτός του A. Άρα, $s = s \cdot \chi_A$.

Γράφουμε την

s σε κανονική μορφή : $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$.

$\overset{s=s\cdot\chi_A}{\Longrightarrow} s = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} \right) \cdot \chi_A = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \chi_{A_j \cap A}$

$\rightarrow \int s \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \underbrace{\mu(A_j \cap A)}_{=0} = 0$.

αφού $A_j \cap A \subseteq A$ και $\mu(A)=0$ (και $A_j \cap A \in \mathcal{A}$)

Άρα, $\int f\,d\mu = 0$.

(v) Για την απόδειξη του (v), θέλουμε πολλή περισσότερη δουλειά. Η ιδέα είναι η εξής:

Ξέρουμε ότι υπάρχουν $(s_n)_n$, $(t_n)_n$ αύξουσες ακολουθίες απλών συναρτήσεων, με

$$0 \le s_n \nearrow f \quad \text{και} \quad 0 \le t_n \nearrow g.$$

ΘΔΟ τότε: (*) $\boxed{\int s_n\,d\mu \to \int f\,d\mu, \quad \int t_n\,d\mu \to \int g\,d\mu.}$

Επίσης, οι $s_n + t_n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι απλές συναρτήσεις με $0 \le s_n + t_n \nearrow f+g$.

Παρόμοια θα προκύπτει ότι (*) $\boxed{\int (s_n + t_n)\,d\mu \to \int (f+g)\,d\mu.}$

$$\underbrace{\int (s_n+t_n)\,d\mu}_{= \int s_n\,d\mu + \int t_n\,d\mu} \qquad \int s_n\,d\mu + \int t_n\,d\mu \to \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$$

Άρα, $\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = \int (f+g)\,d\mu$.

Για να ισχύει η (*), θα πρέπει να μπορούμε να πούμε πως, αν μία ακολουθία απλών συναρτήσεων f_n ικανοποιεί πως $f_n \to f$, τότε $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.

Ξέρουμε από την Εβδομάδα 1 πως κάτι τέτοιο γενικά δεν ισχύει. Άρα, θα θέλαμε να βρούμε συνθήκες υπό τις οποίες ισχύει.

Με αυτό θα ασχοληθούμε τώρα, και μετά θα επιστρέψουμε στο (ν).

→ Αν $f_n \to f$ κατά σημείο, τότε πως συγκρίνονται τα $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu$ και $\int f \, d\mu$;

Ένας άλλος τρόπος να σκεφτόμαστε το παραπάνω είναι: Πότε μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ορίου και ολοκληρώματος; Δηλ., πότε ισχύει ότι,

αν $f_n \to f$ κατά σημείο,

$$\text{τότε} \quad \lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu = \int \underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)}_{f} d\mu \quad ?$$

Πρώτα θα δείξουμε το Λήμμα του Fatou, που λέει ότι

$$\int \left(\lim_n f_n\right) d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu \quad (\text{όταν οι } f_n \text{ είναι } \geq 0).$$

(αν φυσικά το όριο δεξιά υπάρχει).

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε το εξής.

• **Λήμμα**: Έστω $s:(X,\mathcal{A},\mu)\to[0,+\infty]$ απλή.

Τότε, η $\nu:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ με $\nu(A):=\int_A s\,d\mu$ $\forall A\in\mathcal{A}$

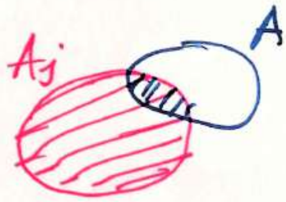
είναι μέτρο.

Απόδειξη: Έστω $s=\sum_{j=1}^{n}\overset{\geq 0}{a_j}\chi_{A_j}$ (σε κανονική μορφή).

$\forall A\in\mathcal{A}$, $\nu(A)=\int_A s\,d\mu=\int s\chi_A\,d\mu=\int\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\chi_{A_j}\right)\cdot\chi_A\,d\mu$

$$=\int\sum_{j=1}^{n}a_j\cdot\chi_{A_j\cap A}\,d\mu=$$

$\chi_{A_j}\cdot\chi_A=\chi_{A_j\cap A}$



γραμμικότητα

$$=\sum_{j=1}^{n}a_j\underbrace{\mu(A_j\cap A)}_{\shortparallel}$$

$\mu_{A_j}(A)$, όπου μ_{A_j} είναι το μέτρο

περιορισμού στο A_j

Αφού το παραπάνω ισχύει $\forall A\in\mathcal{A}$, προκύπτει ότι

$$\nu=\sum_{j=1}^{n}a_j\mu_{A_j}.$$

Αφού κάθε μ_{A_j} είναι μέτρο, και κάθε a_j είναι ≥ 0,

το ν είναι επίσης μέτρο (απλή άσκηση).

■

• Τώρα υπενθυμίζουμε το εξής (Άσκηση του Κεφαλαίου 2):

Για κάθε ακολουθία $(A_n)_n$ συνόλων στην $\mathcal{A}$,

$$\liminf_n A_n := \{x \in X : \text{το } x \text{ ανήκει σε όλα τα τελικά } A_n\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Big(\underbrace{\bigcap_{n \geq k} A_n}_{\substack{\text{αύξουσα ως} \\ \text{προς } k}} \Big).$$

Τότε, $\forall$ μέτρο ν στον $(X, \mathcal{A})$,

$$\boxed{\nu\left(\liminf_n A_n\right) \leq \liminf_n \nu(A_n) :}$$

$$\nu\left(\liminf_n A_n\right) = \lim_{k \to +\infty} \nu\left(\bigcap_{n \geq k} A_n\right).$$

$$\forall k, \quad \nu\left(\bigcap_{n \geq k} A_n\right) \leq \nu(A_k)$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\liminf_{k \to +\infty} \nu\left(\bigcap_{n \geq k} A_n\right)}_{\substack{\| \\ \lim_{k \to +\infty} \nu\left(\bigcap_{n \geq k} A_n\right) \\ \| \\ \nu\left(\liminf_k A_k\right)}} \leq \liminf_k \nu(A_k).$$

■

→ <u>Λήμμα</u> (Fatou): Έστω $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\int \left(\liminf_n f_n\right) d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

⚠ Αυτό σημαίνει πως, $\boxed{\text{αν } f_n \longrightarrow f \text{ κατά σημείο}}$ (στην οποία περίπτωση $f = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n = \liminf\limits_n f_n$), τότε $\int f \, d\mu \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu$, (αν το όριο δεξιά υπάρχει)

δηλ. $\int \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n\right) d\mu \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu$.

Αυτό είναι το καλύτερο που μπορούμε να πούμε, σε πλήρη γενικότητα, για το πώς σχετίζονται τα $\int f \, d\mu$ και $\lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu$. Η κατεύθυνση $\leq$ ισχύει πάντα, ενώ η $\geq$ όχι πάντα.