Απόδειξη του Λήμματος του Fatou:

Έστω $f = \liminf_n f_n$. Θέλουμε: $\int f d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu$,

δηλ: $\sup\{\int s\, d\mu : 0 \le s \le f,\ s \text{ απλή}\} \le \liminf_n \int f_n d\mu$.

Αρκεί λοιπόν ΝΔΟ : $\boxed{\int s\, d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu}$ (*),

$\forall$ s απλή με $0 \le s \le f$.

Έστω λοιπόν τέτοια s (απλή, με $0 \le s \le f$).

Αφού $\int s\, d\mu = \lim_{\varepsilon \to 1^-} \varepsilon \cdot \int s\, d\mu$,

αρκεί ΝΔΟ : $\boxed{\varepsilon \cdot \int s\, d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu,\ \forall \varepsilon \in (0,1).}$ (*')

Πράγματι, (*') $\Rightarrow$ (*).

Έστω λοιπόν $\varepsilon \in (0,1)$.

Θα φανεί σε λίγο γιατί εισάγουμε το ε στην ανάλυσή μας.

Ξέρουμε ότι : $\forall x \in X$,

$$s(x) \le f(x) = \liminf_n f_n(x) = \sup_k \Big(\underbrace{\inf_{n \ge k} f_n(x)}_{= a_k} \Big), \quad (a_k) \nearrow .$$

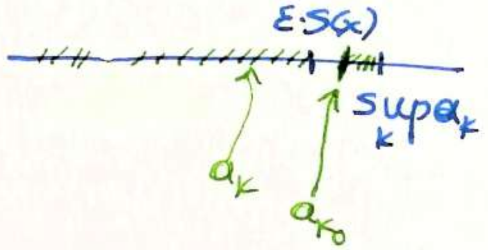
Αφού $s(x) \le \sup_k a_k$, $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\boxed{\varepsilon \cdot s(x) \le a_{k_0} \le \sup_k a_k}$$

Πράγματι, το $\sup_k a_k$ προσεγγίζεται οσοδήποτε καλά από στοιχεία της $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Οπότε:

- Αν $s(x)>0$, τότε $\underset{(0<\varepsilon<1)}{\varepsilon\cdot s(x)} \lneq s(x) \left(\le \sup_k a_k\right)$,

και άρα



$$\varepsilon\cdot s(x) \lneq \sup_k a_k$$
$$\Rightarrow \exists\, k_0\in\mathbb{N} : \varepsilon\cdot s(x) < a_{k_0} \le \sup_k a_k .$$

- Αν $s(x)=0$, τότε φυσικά όλοι οι a_k είναι $\geq s(x) = 0 = \varepsilon\cdot s(x)$. (ως supremum μη αρνητικών ποσοτήτων).

Δείξαμε λοιπόν πως το ότι $0\le s\le f$ σημαίνει ότι:

$\forall x\in X$, $\exists\, k_0=k_0(x)\in\mathbb{N}$ ώστε $\varepsilon\cdot s(x)\le \inf_{n\geq k_0} f_n(x)$

$$\Rightarrow \varepsilon\cdot s(x)\le f_n(x),\ \forall n\geq k_0$$
$$\Rightarrow x\in A_n \quad \forall n\geq k_0 \text{, όπου}$$

$$A_n := \underbrace{\{x\in X : f_n(x) \geq \varepsilon\cdot s(x)\}}_{=\{f_n\geq\varepsilon\cdot s\}} .$$

Με άλλα λόγια, κάθε $x \in X$ ανήκει σε όλα τα τελικά A_n, δηλαδή στο $\liminf_n A_n$.

Άρα, $X = \liminf_n A_n$.

Επομένως,

$$\varepsilon \cdot \int_X s\,d\mu = \varepsilon \cdot \int_{\liminf_n A_n} s\,d\mu$$

$\left(\nu(A) := \int_A s\,d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A} \right.$
$\left. \Rightarrow \nu \text{ μέτρο} \right)$

$$= \varepsilon \cdot \nu(\liminf_n A_n) \leq \varepsilon \cdot \liminf_n \nu(A_n) =$$

$\leq \frac{f_n}{\varepsilon}$ στο A_n

$$= \varepsilon \cdot \liminf_n \int_{A_n} s\,d\mu$$

$$\leq \varepsilon \cdot \liminf_n \int_{A_n} \frac{f_n}{\varepsilon}\,d\mu$$

γραμμικότητα ολοκληρώματος για μη αρνητικές συναρτήσεις

$$= \varepsilon \cdot \liminf_n \left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{A_n} f_n\,d\mu \right)$$

$$= \cancel{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\cancel{\varepsilon}} \cdot \liminf_n \int_{A_n} f_n\,d\mu$$

$f_n \geq 0$, άρα $f_n \chi_{A_n} \leq f_n$, άρα $\int_{A_n} f_n\,d\mu \leq \int_X f_n\,d\mu$.

$$\leq \liminf_n \int_X f_n\,d\mu \,.$$

■

Τώρα θα δούμε για πρώτη φορά ένα θεώρημα που μας επιτρέπει να εναλλάξουμε τη σειρά ορίου και ολοκληρώματος (για μη αρνητικές συναρτήσεις!):

! → <u>Θεώρημα:</u> Έστω $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ κ.σ.

και $\boxed{f_n \leq f \quad \forall n \in \mathbb{N},}$

τότε $\int f_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu$. (δηλ. $\lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim\limits_{n \to +\infty} f_n \, d\mu$).

<u>Απόδειξη:</u> Από το Λήμμα του Fatou,

$$\underbrace{\int f d\mu}_{\substack{\| \\ \liminf_n f_n \\ (\text{αφού } f = \lim_n f_n)}} \leq \liminf_n \int f_n d\mu \boxed{\leq} \limsup_n \overbrace{\boxed{\int f_n d\mu}}^{\leq \int f d\mu \ \forall n \ (\text{μονοτονία})}$$

δε γνωρίζουμε ακόμα αν το $\lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n d\mu$ υπάρχει.

$$\leq \int f d\mu .$$

Άρα, όλα τα στοιχεία στην παραπάνω αλυσίδα είναι ίσα. Οπότε, το $\lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n d\mu$ <u>υπάρχει</u>, και ισούται με $\int f d\mu$.

■

Άμεσο πόρισμα είναι το παρακάτω, που έχει επικρατήσει ως ένα από τα πιο γνωστά θεωρήματα που επιτρέπουν εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος (για μη αρνητικές συναρτήσεις!) :

! → $\boxed{\text{Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης}}$: Έστω

$f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη, $\forall n \in \mathbb{N}$,

ώστε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι $\boxed{\text{αύξουσα}}$

(δηλ., $\forall x \in X$, $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x) \le \dots$) .

Τότε, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right) d\mu$.

(Δηλαδή, $\exists\, f$ ώστε $f_n \longrightarrow f$ κ.σ., και μάλιστα $\int f_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu$).

<u>Απόδειξη</u>: Αφού $(f_n)_n \nearrow$, έχουμε ότι $(f_n(x))_n \nearrow$ στο $[0,+\infty]$ $\forall$ $x \in X$, και άρα υπάρχει το $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \sup\limits_n f_n(x)$ $\forall x \in X$. Ορίζουμε

$$f(x) := \underset{n \to +\infty}{\lim} \left(\sup_n\right) f_n(x), \quad \forall x \in X,$$

και άρα $f_n \to f$ κ.σ.

Επιπλέον, $f_n \leq f \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (αφού $f = \sup_n f_n$).

Άρα, από το παραπάνω Θεώρημα,

$$\int f_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu$$

(δηλαδή $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu = \int \left(\lim_{n \to +\infty} f_n \right) d\mu$).

■

⚠ Τώρα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε πως το ολοκλήρωμα είναι <u>προσθετικό</u> στο χώρο των μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$.

Η ιδέα είναι πως, αν $(s_n)_n$ είναι αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων με $0 \leq s_n \nearrow f$, τότε

$$\int s_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu,$$

από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.

→ <u>Πρόταση</u> (προσθετικότητα ολοκληρώματος για μη αρνητικές συναρτήσεις):

Έστω $f, g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες. Τότε:

(i) $\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$.

(ii) Αν $f \leq g$ στο X και $\int f d\mu < +\infty$, τότε

$$\int (g-f)\, d\mu = \int g\, d\mu - \int f\, d\mu.$$

<u>Απόδειξη</u>: (i) Ξέρουμε πως υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $(s_n)_n$, $(t_n)_n$ απλών συναρτήσεων, με $0 \leq s_n \nearrow f$ και $0 \leq t_n \nearrow g$.

Άρα, η $(s_n + t_n)_n$ είναι <u>αύξουσα</u> ακολουθία

$(s_n(x) + t_n(x) \leq s_{n+1}(x) + t_{n+1}(x) \ \forall x \in X)$

<u>απλών</u> συναρτήσεων (γραμμικοί συνδυασμοί απλών συναρτήσεων είναι απλές συναρτήσεις),

με $0 \leq s_n + t_n \nearrow f + g$.

Άρα, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης:

$$\int (s_n+t_n)\,d\mu \longrightarrow \int (f+g)\,d\mu,$$

και
$$\int (s_n+t_n)\,d\mu \underset{\substack{\text{γραμμικότητα ολοκληρώματος}\\ \text{για μη αρνητικές}\\ \text{απλές συναρτήσεις.}}}{=} \int s_n\,d\mu + \int t_n\,d\mu \longrightarrow \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$$

Άρα, $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$

(ii) $g = \underbrace{(g-f)}_{\substack{\geq 0,\\ \text{αφού } f\leq g}} + f$, όπου όλες οι $g,\ g-f,\ f$ είναι μη αρνητικές, μετρήσιμες συναρτήσεις.

Άρα, από το (i), $\int g\,d\mu = \int (g-f)\,d\mu + \int f\,d\mu$

$$\underset{\int f\,d\mu<+\infty}{\Longrightarrow} \quad \int (g-f)\,d\mu = \int g\,d\mu - \int f\,d\mu.$$

(για να αποφευχθεί απροσδιοριστία)

∎

⚠ Τώρα θα δώσουμε ένα άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης, που επιτρέπει, υπό συνθήκες, την εναλλαγή σειράς και ολοκληρώματος:

!

→ Θεώρημα (Levi): Έστω $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu .$$

Απόδειξη: Έστω $s_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Τότε, αφού κάθε f_n είναι μη αρνητική μετρήσιμη, έχουμε ότι κάθε s_N είναι επίσης μη αρνητική μετρήσιμη, και μάλιστα ότι η $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Επομένως, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\lim_{N \to +\infty} \int s_N \, d\mu = \int \lim_{N \to +\infty} s_N \, d\mu,$$

δηλ. $\lim\limits_{N\to+\infty} \underbrace{\int\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\mu}_{\displaystyle \overset{\shortparallel}{\sum_{n=1}^{N}\int f_n\,d\mu}} = \int\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) d\mu$,

λόγω γραμμικότητας

δηλ. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n\,d\mu = \int\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) d\mu.$$

■

→ Ασκήσεις - Θεωρία:

① (i) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

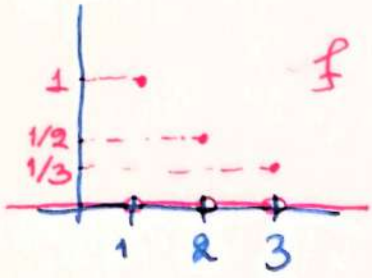
Βρείτε τα $\int f\,d\lambda$ και $\int f\,d\nu$, όπου ν είναι το μέτρο απαρίθμησης στον $\mathbb{R}$ ($\nu(A) = \#A$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}$).

(ii) Έστω $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $f: \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ με $f(n) = a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Δείξτε ότι $\int f\,d\nu = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

(εδώ το ν είναι το μέτρο απαρίθμησης στον $\mathbb{N}$).

Λύση: (i) $f = 1 \cdot \chi_{\{1\}} + \frac{1}{2} \cdot \chi_{\{2\}} + \frac{1}{3} \chi_{\{3\}}$



$\Longrightarrow$

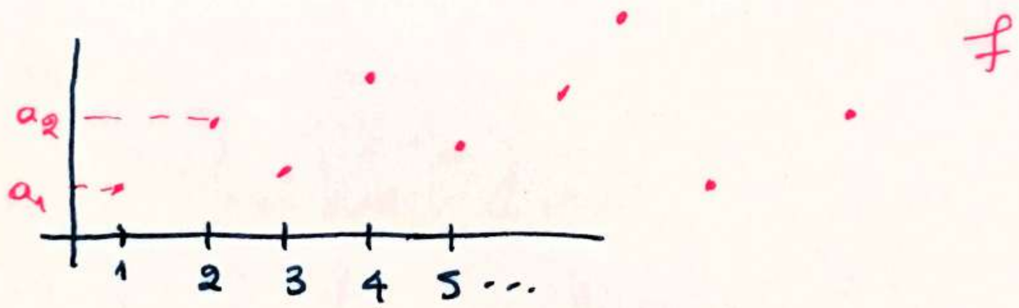
$$\int f d\lambda = 1 \cdot \cancelto{0}{\lambda(\{1\})} + \frac{1}{2} \cdot \cancelto{0}{\lambda(\{2\})} + \frac{1}{3} \cdot \cancelto{0}{\lambda(\{3\})}$$

$$= 0 ,$$

ενώ $$\int f dv = 1 \cdot \underbrace{v(\{1\})}_{=1} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{v(\{2\})}_{=1} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{v(\{3\})}_{=1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} .$$

(ii) (α' τρόπος):



$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \chi_{\{n\}} .$$

$\forall\ N \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot \chi_{\{n\}}$,

η οποία είναι απλή, μη αρνητική συνάρτηση.

Παρατηρούμε ότι $0 \leq s_N \nearrow f$, και άρα, από Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int s_N \, dv \longrightarrow \int f \, dv.$$

Απλ.: $\int f \, dv = \lim_{N \to +\infty} \int s_N \, dv =$

$$= \lim_{N \to +\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} a_n \cdot v(\{n\}) \right)}_{\sum_{n=1}^{N} a_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n .$$

<u>β' τρόπος:</u> $f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \chi_{\{n\}}$, όπου κάθε

$a_n \chi_{\{n\}}$ είναι μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση.

Από το Θεώρημα Levi,

$$\int f \, dv = \sum_{n=1}^{+\infty} \int a_n \chi_{\{n\}} \, dv$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot v(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n . \quad \blacksquare$$

→ Η έννοια του σχεδόν παντού:

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

Λέμε ότι μια ιδιότητα P ισχύει μ- $\underbrace{\text{σχεδόν παντού}}_{\text{σ.π.}}$ στον X αν:

$$\mu\left(\{x \in X \text{ για τα οποία δεν ισχύει η } P\}\right) = 0.$$

Π.χ.: Η συνάρτηση Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$ είναι ίση με 0 λ- σ.π. στον $\mathbb{R}$, καθώς το $\{x \in \mathbb{R} : \chi_{\mathbb{Q}}(x) \neq 0\} = \mathbb{Q}$, που έχει μέτρο Lebesgue $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

(συνέχεια ασκήσεων):

3) Έστω $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη. Τότε,

$$\int f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{- σ.π.}$$

Λύση: Έστω $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\} = \{f > 0\}$ (αφού $f \geq 0$).

Τότε, $\int f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu$ $\left(\begin{array}{l}\text{αφού} \\ f = f\chi_A + f\chi_{A^c}\end{array}\right)$.

$A^c = \{f = 0\}$

($\Leftarrow$) Αν $f = 0$ μ-σ.π., τότε $\mu(A) = 0$,

άρα $\int_A f d\mu = 0$, και άρα

$$\int f d\mu = \int_{A^c} f d\mu \overset{f=0}{\underset{\text{στο } A^c}{=\!=\!=}} \int_{A^c} 0 \, d\mu = 0.$$

($\Rightarrow$) Έστω ότι $\int f d\mu = 0$. Υποθέτουμε (για άτοπο)

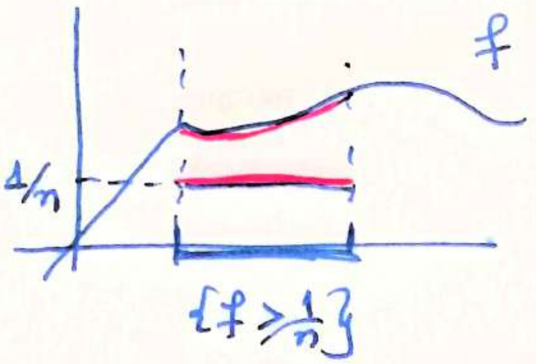
ότι η f <u>δεν</u> είναι 0 μ-σ.π., δηλ. ότι

το $\{f \neq 0\}$ $(= \{f > 0\})$ έχει <u>θετικό</u> μέτρο μ.

Αφού $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{f \geq \frac{1}{n}\}$,

$$0 < \mu(\{f > 0\}) = \lim_{n \to +\infty} \mu(\{f \geq \tfrac{1}{n}\})$$

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(\{f \geq \frac{1}{n}\}) > 0$.



Στο $A_n := \{f \geq \frac{1}{n}\}$, ισχύει ότι $f \geq \frac{1}{n}$

$$\Longrightarrow \int_{A_n} f\,d\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n}\,d\mu = \frac{1}{n}\,\mu(A_n)$$

$$= \frac{1}{n}\,\underbrace{\mu\left(\{f \geq \tfrac{1}{n}\}\right)}_{>0}$$

$$> 0.$$

Επομένως, $\int f\,d\mu \geq \int_{A_n} f\,d\mu > 0.$

$f \geq 0$,
άρα $f \geq f\chi_{A_n}$

$\blacksquare$