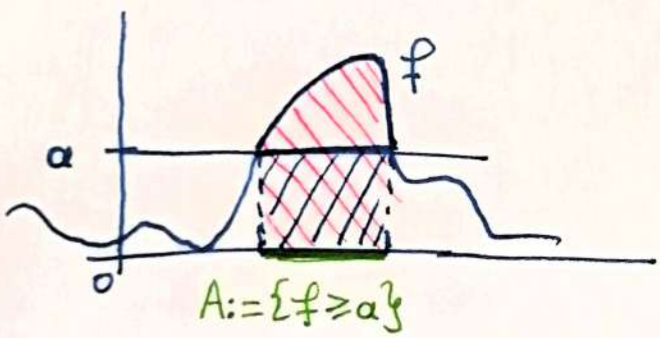
Ασκήσεις - Θεωρία (συνέχεια):

(4) Ανισότητα Markov: Έστω $f:(X,\mathcal{A},\mu)\to[0,+\infty]$ μετρήσιμη. Τότε, $\forall\, a>0$,

$$\mu\Big(\underbrace{\{x\in X:\ f(x)\geq a\}}_{\{f\geq a\}}\Big)\leq\frac{\int f\,d\mu}{a}.$$

Λύση:



$$a\cdot\mu(\{f\geq a\})=$$

$$=\int_{\{f\geq a\}}a\,d\mu\leq\int_{\{f\geq a\}}f\,d\mu\leq\int_X f\,d\mu.$$

$f\geq 0$

αφού στο $\{f\geq a\}$ έχουμε $f\geq a$ (και άρα $f\chi_{\{f\geq a\}}\geq a\cdot\chi_{\{f\geq a\}}$)

■

(5) Έστω $f:(X,\mathcal{A},\mu)\to[0,+\infty]$, με $\int f\,d\mu<+\infty$.

Τότε, $\mu\Big(\underbrace{\{f=+\infty\}}_{\{x\in X:\ f(x)=+\infty\}}\Big)=0$ (δηλ., η f παίρνει πεπερασμένες τιμές μ-σ.π.).

Λύση: $$\int f\,d\mu\overset{f\geq 0}{\geq}\int_{\{f=+\infty\}}f\,d\mu\overset{f\geq n \text{ στο } \{f=+\infty\}}{\geq}\int_{\{f=+\infty\}}n\,d\mu,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

$$=n\cdot\mu(\{f=+\infty\}),\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Άρα, $\mu(\{f=+\infty\}) \leq \underbrace{\dfrac{\int f\,d\mu}{n}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Οπότε, $\mu(\{f=+\infty\})=0$.

(β' τρόπος): Μέσω της ανισότητας Markov.

$$\{f=+\infty\}=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\{f\geq n\}$$

$$\Rightarrow \mu(\{f=+\infty\}) \leq \mu(\{f\geq n\}), \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\underset{\substack{\text{ανισότητα}\\ \text{Markov}}}{\leq} \underbrace{\frac{\int f\,d\mu}{n}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0}, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Άρα, $\mu(\{f=+\infty\})=0$.

■

III Ολοκλήρωμα για τυχαίες μετρήσιμες συναρτήσεις:

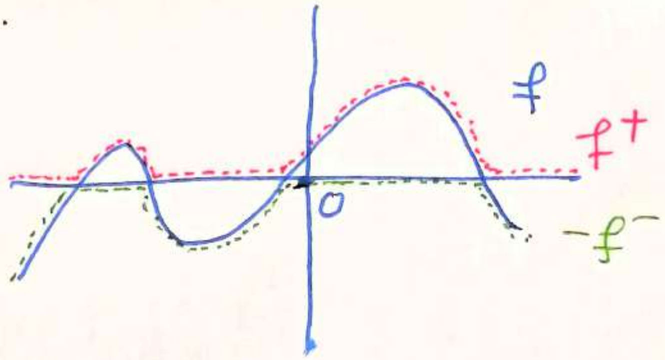
Έστω $f:(X,\mathcal{A},\mu)\to[-\infty,+\infty]$.

Υπενθυμίζουμε ότι οι $f^+ := \max\{f,0\}$,

$f^- := -\min\{f,0\}$

είναι <u>μη αρνητικές</u> μετρήσιμες συναρτήσεις,

$f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.



→ <u>Ορισμός</u>:

Έστω $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη.

Αν τουλάχιστον ένα από τα $\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$ είναι $< +\infty$, τότε ορίζουμε

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

<u>Ειδική περίπτωση</u>: Αν $\int f^+ d\mu < +\infty$ <u>και</u> $\int f^- d\mu < +\infty$, τότε λέμε ότι η f είναι <u>ολοκληρώσιμη</u> (και φυσικά ο παραπάνω ορισμός $\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ ισχύει).

⚠ Η f είναι ολοκληρώσιμη $\iff \int |f| d\mu < +\infty$.

Πράγματι: $(\Longrightarrow)$ f ολοκληρώσιμη $\Longrightarrow \int f^+ d\mu < +\infty$, $\int f^- d\mu < +\infty$.

Άρα, $\int |f| d\mu \overset{|f| = f^+ + f^-}{=\!=\!=} \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty$

(Εδώ χρησιμοποιήσαμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές συναρτήσεις).

($\Leftarrow$) Έστω $\int |f| d\mu < +\infty$. Αφού $|f| = \underbrace{f^+}_{\geq 0} + \underbrace{f^-}_{\geq 0}$,

προκύπτει ότι $f^+ \leq |f|$ και $f^- \leq |f|$

$\longrightarrow$ από μονοτονία του ολοκληρώματος για μη αρνητικές συναρτήσεις, $\int f^+ d\mu \leq \int |f| d\mu < +\infty$ και $\int f^- d\mu \leq \int |f| d\mu < +\infty$. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

■

⚠ Το παραπάνω δεν ισχύει για το ολοκλήρωμα Riemann.

Συγκεκριμένα, αν $\int_a^b |f(x)| dx < +\infty$ (για μία $f : [a,b] \to \mathbb{R}$), τότε δεν ισχύει αναγκαστικά ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Π.χ. : $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ -1, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a,b] \end{cases}$.

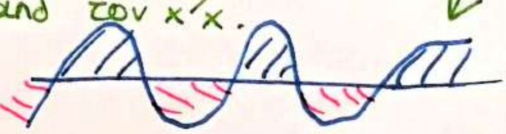
Ενώ $|f| = 1$ στο $[a,b]$, και άρα

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b 1\,dx = b-a < +\infty,$$

η f δεν είναι Riemann-ολοκληρώσιμη.

(Το θέμα εδώ είναι ότι <u>δεν υπάρχουν</u> τα ολοκληρώματα Riemann $\int_a^b f^+(x)\,dx$, $\int_a^b f^-(x)\,dx$, ενώ πάντα υπάρχουν τα $\int_{[a,b]} f^+\,d\lambda$, $\int_{[a,b]} f^-\,d\lambda$, αφού $f^+, f^- \geq 0$, μετρήσιμες, $\forall f$ μετρήσιμη).

<u>Πχ</u>: Η $\sin x$ <u>δεν</u> είναι ολοκληρώσιμη.



→ <u>Ορισμός</u>: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

Ορίζουμε

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \{ f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [-\infty, +\infty] : \underbrace{f \text{ ολοκληρώσιμη}}_{\int |f|\,d\mu < +\infty} \}.$$

<u>Ιδιότητες:</u> (i) Ο $\mathcal{L}^1(\mu)$ είναι διανυσματικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$).

Επίσης, έστω $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε:

(ii) $\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$.

Παρατηρούμε (από την απόδειξη) ότι το (ii) ισχύει ακόμη και όταν *μόνο* ένα από τα f+, f-, g+, g- έχει άπειρο ολοκλήρωμα.

(iii) $\int (a \cdot f)\,d\mu = a \cdot \int f\,d\mu$.

(iv) Αν $f \leq g$ μ-σ.π., τότε $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

(v) $\left| \int f\,d\mu \right| \leq \int |f|\,d\mu$.

<u>Απόδειξη:</u> (i) • Έστω $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Τότε, $f+g \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

καθώς $|f+g| \leq |f| + |g|$

$$\xRightarrow[\text{για μη αρνητ. συναρτήσεις}]{\text{μονοτονία}} \int |f+g|\,d\mu \leq \int (|f|+|g|)\,d\mu$$

$$\overset{\text{γραμμικότητα για μη αρνητ. συναρτήσεις.}}{=} \underbrace{\int |f|\,d\mu}_{<+\infty} + \underbrace{\int |g|\,d\mu}_{<+\infty} < +\infty$$

• Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $a \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

καθώς $\int |a \cdot f|\,d\mu = \int |a| \cdot |f|\,d\mu$

$$\overset{|a| \geq 0,\ |f| \geq 0}{=} |a| \cdot \underbrace{\int |f|\,d\mu}_{<+\infty} < +\infty.$$

(ii) $\boxed{\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu :}$

Έστω $h = f+g$. Τότε:

$h = h^+ - h^-$,

και $h = f+g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$.

Άρα, $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$

$\Rightarrow h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$

$\Rightarrow \int (h^+ + f^- + g^-)\,d\mu = \int (f^+ + g^+ + h^-)\,d\mu$

$\xrightarrow{}$ γραμμικότητα $\int d\mu$ για μη αρνητ. συναρτήσεις

$$\int h^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int h^- d\mu$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int h^+ d\mu - \int h^- d\mu}_{\substack{\| \\ \int h\,d\mu \\ \| \\ \int (f+g)\,d\mu}} = \underbrace{\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu}_{\substack{\| \\ \int f\,d\mu}} + \underbrace{\int g^+ d\mu - \int g^- d\mu}_{\substack{\| \\ \int g\,d\mu .}}$$

(iii) $\boxed{\int (a\cdot f)\,d\mu = a\cdot \int f\,d\mu \;:}$

- Αν $a>0$, τότε, $\forall x\in X$,

$$a\cdot f(x)\geq 0 \iff f(x)\geq 0.$$

Άρα, $(a\cdot f)^+ = a\cdot f^+$ και $(a\cdot f)^- = a\cdot f^-$.

Οπότε, $\int (a\cdot f)\,d\mu \underset{\text{ορ}}{=} \int a\cdot f^+ d\mu - \int a\cdot f^- d\mu$

$$= a\cdot \int f^+ d\mu - a\cdot \int f^- d\mu$$

(γραμμικότητα $\int d\mu$ για μη αρνητ. συναρτήσεις)

$$= a\cdot \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right)$$

$$\underset{\text{ορ}}{=} a\cdot \int f\,d\mu.$$

- Αν $a=0$, τότε $\int (a\cdot f)\,d\mu = \int 0\,d\mu = 0 = 0\cdot \int f\,d\mu = a\cdot \int f\,d\mu$.

- Αν $a<0$, τότε, $\forall x\in X$,

$$a\cdot f(x)\geq 0 \iff f(x)\leq 0$$

Επομένως, $(a\cdot f)^+ = a\cdot(-f^-) = \underbrace{(-a)}_{\geq 0}\cdot f^-$,

$$(a\cdot f)^- = a\cdot(-f^+) = \underbrace{(-a)}_{\geq 0}\cdot f^+.$$

Άρα, $\int (a\cdot f)\,d\mu \underset{\text{op}}{=} \int \underbrace{(-a)}_{\geq 0}\cdot f^- \,d\mu - \int \underbrace{(-a)}_{\geq 0}\cdot f^+\,d\mu$

$= (-a)\cdot \int f^- d\mu - (-a)\int f^+ d\mu$

γραμμικότητα $\int d\mu$ για μη αρνητικές παραμέτρους

$= a\cdot \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right) \underset{\text{op}}{=} a\cdot \int f d\mu.$

(iv) Έστω $f\leq g$ μ-σ.π.

Τότε, το $A := \{x\in X : f(x) > g(x)\}$ έχει $\mu(A)=0$.

Επομένως, $\int f d\mu = \cancel{\int_A f d\mu}^{\,0} + \int_{A^c} f d\mu,$

$\int g d\mu = \cancel{\int_A g d\mu}^{\,0} + \int_{A^c} g\, d\mu.$

Στο A^c, $f\leq g$, δηλ. $f\chi_{A^c} \leq g\cdot \chi_{A^c}$

$\Rightarrow \quad g\chi_{A^c} - f\chi_{A^c} \geq 0$

$\xRightarrow{}$ μονοτονία για μη αρνητ. συναρτ. $\quad \int (g\chi_{A^c} - f\chi_{A^c})\,d\mu \geq \int 0\, d\mu = 0 \Longrightarrow$

$\xrightarrow[\text{γραμμικότητα που μόλις δείξαμε για το } \int d\mu \text{ στον } \mathcal{L}^1(\mu)]{}$ $\underbrace{\int g\chi_{A^c}\,d\mu}_{\int g\,d\mu} - \underbrace{\int f\chi_{A^c}\,d\mu}_{\int f\,d\mu} \geq 0$,

δηλαδή $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.

(v) $\boxed{\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu}$:

$-|f| \leq f \leq |f|$, όπου όλες οι $f, |f|, -|f|$ είναι στον $\mathcal{L}^1(\mu)$

$\xrightarrow[\text{από μονοτονία του } \int d\mu \text{ που μόλις δείξαμε στον } \mathcal{L}^1(\mu)]{}$ $\underbrace{\int -|f|\,d\mu}_{-\int |f|\,d\mu,\ \text{αφού } \int d\mu \text{ γραμμικό στον } \mathcal{L}^1(\mu)} \leq \int f\,d\mu \leq \int |f|\,d\mu$

$\Rightarrow -\int |f|\,d\mu \leq \int f\,d\mu \leq \int |f|\,d\mu$,

δηλ. $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$.

■

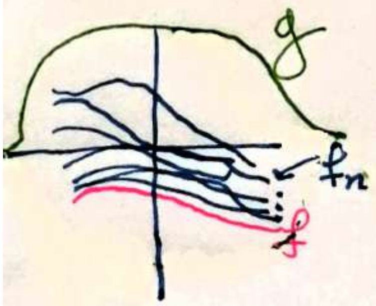
→ Τώρα θα δείξουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, που θα μάς δώσει <u>μία συνθήκη</u> υπό την οποία, αν $f_n \to f$ κ.σ. (αλλά για τυχαίες $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$, όχι αναγκαστικά μη αρνητικές), τότε $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.

Πρώτα θα δείξουμε την παρακάτω <u>ασθενή</u> μορφή του θεωρήματος, που μπορούμε να τη δούμε ως "συμμετρική" της παρακάτω πρότασης, που αποδείξαμε για <u>μη αρνητικές</u> συναρτήσεις:

" Αν $f_n \geq 0$ μετρήσιμη $\forall n \in \mathbb{N}$,
$f_n \to f$ κ.σ.
<u>και</u> $\boxed{f_n \leq f \quad \forall n \in \mathbb{N},}$
τότε $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ " (*)

→ <u>Πρόταση</u>: Αν $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη $\forall n \in \mathbb{N}$,

$f_n \to f$ κ.σ.,



θα απορριφθεί στο Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

<u>και</u> $\boxed{f_n \geq f \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

$\int |g| \, d\mu < +\infty$
$\Uparrow$

<u>και</u> $\boxed{\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ ώστε } f_n \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N},}$

τότε $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.

θα γίνει $|f_n| \leq g$ στο Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

Απόδειξη: $f_n \geq f \ \forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \to f$ κ.σ.

$\Rightarrow \quad -f_n \leq -f \ \forall n \in \mathbb{N}$, $-f_n \to -f$ κ.σ.

$\Rightarrow \quad \underbrace{g - f_n}_{\substack{\geq 0, \\ \text{μετρήσιμη} \\ \forall n \in \mathbb{N}}} \leq g - f \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\quad g - f_n \to g - f$ κ.σ.

Από την Πρόταση (*), $\underbrace{\int (g - f_n)\, d\mu}_{\int g\, d\mu - \int f_n\, d\mu} \longrightarrow \underbrace{\int (g - f)\, d\mu}_{\int g\, d\mu - \int f\, d\mu}$,

(για τη γραμμικότητα χρησιμοποιούμε ότι τα g+, g- έχουν πεπερασμένο ολοκλήρωμα, και άρα το ίδιο και τα f_n+, f+).

και αφού $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ έχουμε ότι $\int g\, d\mu \in \mathbb{R}$

$\left(g \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow \int |g|\, d\mu < +\infty \right.$, δηλ. $\int g^+ d\mu < +\infty$ και $\int g^- d\mu < +\infty$, και άρα $\left. \int g\, d\mu = \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \in \mathbb{R} \right)$.

Επομένως, $\int f_n\, d\mu \longrightarrow \int f\, d\mu$.

$\blacksquare$

→ $\boxed{\text{Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης}}$:

Έστω $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη $\forall n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{κ.σ.} \quad \mu\text{-σ.π.}$$

και $\boxed{\exists\, g \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ ώστε: } \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq g \quad \mu\text{-σ.π.}}$

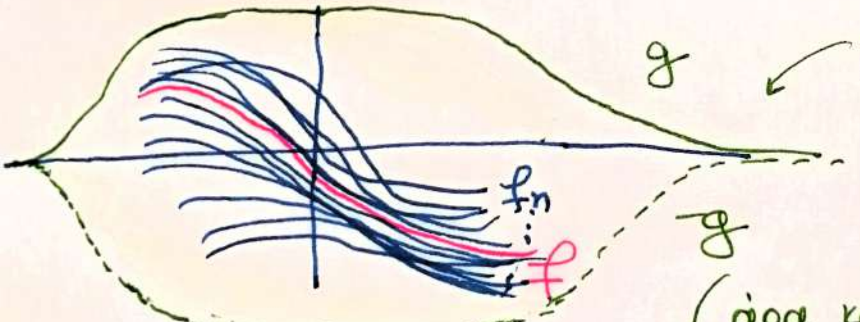
$\int g\,d\mu = \int |g|\,d\mu < +\infty$

$\underset{\leq 0}{-g} \leq f_n \leq \underset{\geq 0}{g}$

Η g είναι ανεξάρτητη του n, δηλ. κυριαρχεί επί όλων των $|f_n|$.

Τότε, $\int |f_n - f|\,d\mu \longrightarrow 0$

(και άρα $\int f_n\,d\mu \longrightarrow \int f\,d\mu$)



Πεπερασμένο εμβαδό μεταξύ της g και του $x'x$ ($\int \underset{\geq 0}{g}\,d\mu < +\infty$)

(άρα και μεταξύ της $-g$ και του $x'x$ ($\int \underset{\leq 0}{(-g)}\,d\mu \in \mathbb{R}$).)

⚠ Τεχνικά μιλώντας, η f στο θεώρημα δεν ορίζεται σε όλο το X. Πράγματι, η f είναι το κατά σημείο όριο των f_n — όμως αυτό το όριο υπάρχει μ- σχεδόν παντού, και όχι αναγκαστικά παντού. Αυτό είναι πρόβλημα, καθώς θέλουμε να μιλάμε για το $\int_X f d\mu$.
Συγκεκριμένα, η f δεν ορίζεται στο

$$A := \{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\},$$

το οποίο όμως είναι αμελητέο ($\mu(A)=0$).

Άρα, για να μπορούμε να μιλάμε για το $\int f d\mu$, ορίζουμε την f όπως επιθυμούμε στο A, ώστε η $f \cdot \chi_A$ να είναι μετρήσιμη (π.χ., θέτουμε $f=0$ στο A).

Αφού $A \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι και $A^c \in \mathcal{A}$, και άρα κάθε $f_n \chi_{A^c}$ είναι μετρήσιμη. Αφού $f_n \to f$ στο A^c, ισχύει ότι $f_n \chi_{A^c} \to f \chi_{A^c}$ κ.σ., και άρα η $f \chi_{A^c}$ είναι και αυτή μετρήσιμη.

Επομένως, η $f = \underbrace{f\chi_A}_{\substack{\text{μετρήσιμη} \\ \text{λόγω επιλογής} \\ \text{μας}}} + \underbrace{f\chi_{A^c}}_{\substack{\text{μετρήσιμη} \\ \text{λόγω υποθέσεων}}}$ είναι μετρήσιμη.

Και το $\int_X f d\mu = \cancel{\int_A f d\mu}^{\,0} + \int_{A^c} f d\mu$ είναι ανεξάρτητο της

$A \leftarrow \mu(A)=0$

επιλογής μας για τις τιμές της f στο A.

(Αυτά γίνονται τετριμμένα αν δουλεύουμε στο χώρο $L^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu)/_\sim$, όπου $f \sim g$ αν $f = g$ μ-σ.π. Στον $L^1(\mu)$, δηλαδή, δύο συναρτήσεις ταυτίζονται αν διαφέρουν μόνο σε σύνολο μέτρου 0. Βλέποντας την f σαν στοιχείο του $L^1(\mu)$, δεν έχει σημασία τι τιμές παίρνει η f στο A, αφού $\mu(A) = 0$).

<u>Απόδειξη:</u> (Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης):

⇝ Πρώτα αποδεικνύουμε το θεώρημα όταν οι συνθήκες του ισχύουν παντού, και όχι απλά σχεδόν παντού.

Δηλ., όταν $f_n \longrightarrow f$ κ.σ.

και $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(\mu) : \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq g$.

$$\Downarrow$$

$|f| \leq g$ (παίρνοντας κ.σ. όρια)

Τότε, $|f_n - f| \longrightarrow 0$,

$|f_n - f| \geq 0$

και $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g$, όπου $2g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Άρα, από την τελευταία πρόταση (αφού κάθε

$|f_n - f|$ είναι μετρήσιμη (η f είναι κ.σ. όριο μετρησίμων)),

προκύπτει ότι $\int |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow \int 0 \, d\mu = 0$.

Άρα, $\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,

άρα $\int f_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu$.

Εδώ χρησιμοποιούμε ότι $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,
(και το $\int d\mu$ είναι γραμμικό στον $\mathcal{L}^1(\mu)$).
Πράγματι:

- $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$: $|f_n| \leq g \Rightarrow \int |f_n| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < +\infty$.
- $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$: $|f| \leq g \Rightarrow \int |f| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < +\infty$.