⇝ Τώρα αποδεικνύουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης στη γενική περίπτωση (όπου οι συνθήκες ισχύουν μ-σ.π.

- Έστω $A_0 := \{ x \in X : f_n(x) \not\to f(x) \}$.

Ξέρουμε ότι $\mu(A_0) = 0$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, έστω $A_n := \{ x \in X : |f_n(x)| > g(x) \}$.

Ξέρουμε ότι $\mu(A_n) = 0$.

"Πετάμε" τα κακά σύνολα (που όμως έχουν μέτρο 0).

Το $B := \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ έχει $\mu(B) = 0$

(καθώς $\mu(B) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$),

$$\left.\begin{array}{l} \text{και } f_n \longrightarrow f \text{ κ.σ.} \\ \text{και } \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g \end{array}\right\} \text{ στο } B^c.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Άρα, } f_n \chi_{B^c} \longrightarrow f \chi_{B^c} \text{ κ.σ.} \\ \text{και } \forall n \in \mathbb{N}, |f_n \chi_{B^c}| \leq g \text{ , όπου } g \in \mathcal{L}^1(\mu). \end{array}\right\}$$

Επομένως, από την απλή περίπτωση που αποδείξαμε ήδη,

$$\int_X |f_n \chi_{B^c} - f \chi_{B^c}| \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

Εδώ έχει σημασία ότι $\exists$ το $\mu(B)$
$\Rightarrow B \in \mathcal{A} \Rightarrow B^c \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow f_n \chi_{B^c}$ <u>μετρήσιμη</u> $\forall n$.

δηλαδή $$\int_{B^c} |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Άρα, $$\int_X |f_n - f| \, d\mu = \int_{B^c} |f_n - f| \, d\mu + \underbrace{\int_B |f_n - f| \, d\mu}_{\substack{= \\ 0, \text{ αφού} \\ \mu(B)=0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Επομένως,

$$\Big| \underbrace{\int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu}_{\substack{= \\ \int (f_n - f) \, d\mu}} \Big| \leq \int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad \text{άρα}$$

$$\int f_n \, d\mu \longrightarrow \int f \, d\mu.$$

■

→ <u>Πρόταση:</u> Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη. Τότε, η f είναι Lebesgue-μετρήσιμη, και

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$$

ολοκλήρωμα Riemann

ολοκλήρωμα Lebesgue

<u>Απόδειξη:</u> Υπενθυμίζουμε ότι η $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη $\Longleftrightarrow$

$$\sup \{ L(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση του } [a,b] \}$$
$$=$$
$$\inf \{ U(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση του } [a,b] \}.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ ορίζεται ως η παραπάνω κοινή τιμή.

Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P} = \{ \underset{a}{\overset{\shortparallel}{a_0}} < a_1 < a_2 < \dots < \underset{b}{\overset{\shortparallel}{a_n}} \}$ του $[a,b]$,

- $L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot (a_{i+1} - a_i) = \int_a^b \ell^{\mathcal{P}}(x)dx$, όπου

$m_i := \inf\{ f(x) : x \in [a_i, a_{i+1}] \} \; \forall i = 0, 1, \dots, n-1$

και η $\ell^{P} := \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot \chi_{[a_i, a_{i+1})}$ είναι <u>κλιμακωτή</u>

(δηλ. σταθερή πάνω από ξένα, πεπερασμένα το πλήθος διαστήματα) , με $\ell^{P} \leq f$.

- $U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot (a_{i+1} - a_i) = \int_a^b u^{P}(x)dx$, όπου

$M_i := \inf\{ f(x) : x \in [a_i, a_{i+1}]\}$ $\forall i = 0, 1, \dots, n-1$

και η $u^{P} := \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot \chi_{[a_i, a_{i+1})}$ είναι <u>κλιμακωτή</u>, με

$f \leq u^{P}$.

<u>Βήμα 1:</u> Έστω $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη. Τότε, η f είναι Lebesgue-μετρήσιμη.

<u>Απόδ.:</u> ΘΔΟ $\exists$ $(\ell^{Q_n})_n$ ακολ. κλιμακωτών, με $\ell^{Q_n} \longrightarrow f$ λ-σ.π.

- $\int_a^b f(x)dx = \sup\{ L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$.

Άρα, υπάρχει ακολουθία $(P_n)_n$ διαμερίσεων του $[a,b]$, ώστε $L(f,P_n) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$. Τότε, ορίζοντας $Q_1 := P_1$, $Q_2 = P_1 \cup P_2$, $\dots$, $Q_n := P_1 \cup \dots \cup P_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι η $(Q_n)_n$ είναι ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$, με

$$\underbrace{L(f,Q_n)}_{\displaystyle \overset{\shortparallel}{\int_a^b \ell^{Q_n}(x)\,dx}} \nearrow \int_a^b f(x)\,dx$$

(καθώς κάθε Q_n είναι εκλέπτυνση της P_n, και $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \ldots$).

Μάλιστα, η ακολουθία $(\ell^{Q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ κλιμακωτών (και άρα απλών) συναρτήσεων είναι αύξουσα, με

(*) $\ell^{Q_n} \leq f \;\; \forall n\in\mathbb{N}$.

Άρα, $\forall x \in [a,b]$, υπάρχει το

$$g(x) := \sup_n \ell^{Q_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \ell^{Q_n}(x),$$

και, λόγω της (*), $\quad g \leq f \;\; \forall n\in\mathbb{N}$.

Επίσης, η f είναι φραγμένη $\longrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: $|f| \leq M$ στο $[a,b]$. Παρατηρούμε, από τον ορισμό των ℓ^P, ότι

$$\forall n\in\mathbb{N}, \;\; |\ell^P| \leq M \;\; \text{στο } [a,b],$$

και $$\int_{[a,b]} M \, d\lambda = M\cdot(b-a) < +\infty.$$

Άρα, από το Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\ell^{Q_n} \to g \longrightarrow \int_{[a,b]} \ell^{Q_n} d\lambda \longrightarrow \int_{[a,b]} g\, d\lambda .$$

$$\overset{\displaystyle\int_a^b \ell^{Q_n}(x)\,dx}{\parallel}$$

Άρα, $\displaystyle\int_{[a,b]} g\,d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \inf \{ U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b] \}.$

Με παρόμοιο τρόπο, βρίσκουμε φθίνουσα $(u^{\tilde{Q}_n})_{n\in\mathbb{N}}$,

με $\displaystyle\int_{[a,b]} u^{\tilde{Q}_n} d\lambda \searrow \int_a^b f(x)\,dx,$

$u^{\tilde{Q}_n} \searrow h$ κ.σ., για κάποια $h \geq f$,

και $\displaystyle\int_{[a,b]} u^{\tilde{Q}_n} d\lambda \longrightarrow \int_{[a,b]} h\, d\lambda$,

άρα με $\displaystyle\int_{[a,b]} h\, d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$

Επομένως, $g \leq f \leq h$ και $\displaystyle 0 \leq \int_{[a,b]} (h-g)\, d\lambda = \int_{[a,b]} h\,d\lambda - \int_{[a,b]} g\, d\lambda$

$$= \cancel{\int_a^b f(x)dx} - \cancel{\int_a^b f(x)dx} = 0 \Longrightarrow \int_{[a,b]} \underbrace{(h-g)}_{\geq 0}\, d\lambda = 0 \longrightarrow$$

$\Longrightarrow \quad g = h \quad \lambda$-σ.π.

$\underset{g \leq f \leq h}{\Longrightarrow} \quad g = f \quad \lambda$-σ.π.

Αφού $e^{a_n} \to g$ κ.σ., προκύπτει ότι

$$e^{a_n} \to f \quad \text{κ.σ.} \quad \lambda\text{-σ.π.}$$

Άρα, η f είναι μετρήσιμη, ως όριο απλών (και άρα μετρησίμων) συναρτήσεων.

<u>Βήμα 2:</u>

[Δείχνουμε ότι η πρόταση <u>αρκεί</u> να δειχθεί για Riemann-ολοκληρώσιμες $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ με $\boxed{f \geq 0}$.

Πράγματι, έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη.

Η f είναι φραγμένη, άρα $\exists$ c σταθερά ώστε

$f + c \geq 0$. Αφού η $f+c$ είναι Riemann-

ολοκληρώσιμη, αν ξέρουμε ότι

$$\int_a^b (f(x)+c)\,dx = \int_{[a,b]} (f+c)\,d\lambda,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + c(b-a) \qquad\qquad \int_{[a,b]} f\,d\lambda + c(b-a),$$

τότε προκύπτει ότι $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$.

Βήμα 3: [Η πρόταση ισχύει για κλιμακωτές συναρτήσεις στο $[a,b]$. Πράγματι, έστω

$$l = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi_{I_i}$$, όπου $c_i \in \mathbb{R}$ και

τα $I_1, \dots, I_n$ είναι ξένα διαστήματα στο $[a,b]$. Τότε,

$$\int_a^b l(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \underbrace{(\text{μήκος του } I_i)}_{\text{"διαφορά άκρων"}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \lambda(I_i)$$

$$= \int_{[a,b]} l \, d\lambda.$$

⚠ Αυτό χρησιμοποιήθηκε ήδη στο Βήμα 1.

Βήμα 4: [Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη, με $\boxed{f \geq 0}$.

Τότε, $\int_a^b f(x)dx = \sup \left\{ \int_{[a,b]} l \, d\lambda : \boxed{0 \leq l} \leq f, \ l \text{ κλιμακωτή} \right\}$]

Πράγματι,

- $\forall$ ℓ κλιμακωτή με $0 \le \ell \le f$, έχουμε

$$\underbrace{\int_a^b \ell(x)dx}_{\int_{[a,b]} \ell \, d\lambda} \le \int_a^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow \sup \left\{ \int_{[a,b]} \ell \, d\lambda : 0 \le \ell \le f, \ \ell \text{ κλιμακωτή} \right\} \le \int_a^b f(x)dx.$$

- $$\int_a^b f(x)dx = \sup \left\{ L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b] \right\}$$
$$= \sup \left\{ \int_{[a,b]} \ell^P d\lambda : \text{———''———} \right\}$$

Κάθε ℓ^P είναι κλιμακωτή, με $0 \le \ell^P \le f$.

Άρα, $\left\{ \ell^P : P \text{ διαμέριση του } [a,b] \right\}$
$$\subseteq$$
$$\left\{ \ell : \ell \text{ κλιμακωτή}, \ 0 \le \ell \le f \right\}$$

$$\Rightarrow \sup \left\{ \int_{[a,b]} \ell^P d\lambda : P \text{ διαμέριση του } [a,b] \right\}$$
$$\le \sup \left\{ \int_{[a,b]} \ell \, d\lambda : \ell \text{ κλιμακωτή}, \ 0 \le \ell \le f \right\}.$$

Βήμα 5: Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη, με $f \geq 0$. Τότε,

$$\underbrace{\sup\left\{ \int_{[a,b]} \ell \, d\lambda : 0 \leq \ell \leq f, \ \ell \text{ κλιμακωτή} \right\}}_{= \int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\leq$$

$$\underbrace{\sup\left\{ \int_{[a,b]} s \, d\lambda : 0 \leq s \leq f, \ s \text{ απλή} \right\}}_{= \int_{[a,b]} f \, d\lambda}$$

Πράγματι:

- Κάθε κλιμακωτή είναι απλή. Άρα,

$$\{ \ell : 0 \leq \ell \leq f, \ \ell \text{ κλιμακωτή} \} \subseteq \{ s : 0 \leq s \leq f, \ s \text{ απλή} \}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\sup\left\{ \int_{[a,b]} \ell \, d\lambda : 0 \leq \ell \leq f, \ \ell \text{ κλιμακωτή} \right\}$$

$$\leq$$

$$\sup\left\{ \int_{[a,b]} s \, d\lambda : 0 \leq s \leq f, \ s \text{ απλή} \right\}.$$

Δηλ., $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_{[a,b]} f \, d\lambda$.

• Ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

Πράγματι, $\int_a^b f(x)dx = \inf\{\mathcal{U}(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$

$$= \inf\Big\{\int_{[a,b]} u^P d\lambda \;:\; P \text{ διαμέριση του } [a,b]\Big\}.$$

$\forall$ s απλή με $0 \leq s \leq f$, και $\forall$ P διαμέριση του $[a,b]$,

$$s \leq u^P$$

$$\rightarrow \int_{[a,b]} s\,d\lambda \leq \int_{[a,b]} u^P d\lambda$$

$$\Rightarrow \sup\Big\{\int_{[a,b]} s\,d\lambda : 0 \leq s \leq f\Big\} \leq \inf\Big\{\int_{[a,b]} u^P d\lambda : P \text{ διαμ. του } [a,b]\Big\}$$

Δηλ. : $\int_{[a,b]} f\,d\lambda \leq \int_a^b f(x)dx$.

■

→ Άσκηση / Θεωρία: Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, η οποία είναι Riemann-ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,b]$. Στον Απειροστικό, ορίζουμε

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\,dx.$$

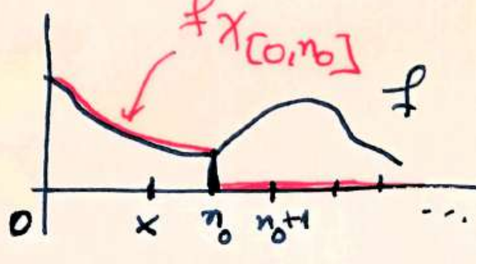
Δείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{[0,+\infty)} f\,d\lambda.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f\chi_{[0,n]}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Κάθε $f\chi_{[0,n]}$ είναι μετρήσιμη (καθώς η $f_{|[0,n]}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη).

Επίσης:

• $\boxed{f\chi_{[0,n]} \longrightarrow f \quad \text{κ.σ.}}$:



$\forall x\in[0,+\infty)$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$: $n_0\geq x$

$\Longrightarrow \quad n\geq x, \ \forall n\geq n_0$

$\Longrightarrow \quad x\in[0,n], \ \forall n\geq n_0$

$\Longrightarrow \quad \chi_{[0,n]}(x)=1, \ \forall n\geq n_0$

$\Longrightarrow \quad f\chi_{[0,n]}(x)=f(x), \ \forall n\geq n_0$

$\Rightarrow \quad f\chi_{[0,n]}(x) \longrightarrow f(x), \quad \forall x \in [0,+\infty).$

- $f\chi_{[0,n]} \geq 0 \quad \forall n$, αφού $f \geq 0$.

Άρα, από Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int_{[0,+\infty)} f\chi_{[0,n]}\, d\lambda \longrightarrow \int_{[0,+\infty)} f\, d\lambda.$$

Όμως, $\displaystyle\int_{[0,+\infty)} f\chi_{[0,n]}\, d\lambda = \int_{[0,n]} f\, d\lambda$

$$= \int_0^n f(x)\,dx \quad ,$$

f Riemann-
ολοκληρώσιμη στο
$[0,n]$

και άρα $\displaystyle\int_{[0,+\infty)} f\chi_{[0,n]}\, d\lambda \longrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$

Άρα, $\displaystyle\int_{[0,+\infty)} f\, d\lambda = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$ ∎

→ <u>Ασκήσεις</u>:

① (i) Βρείτε το $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} x^n \cos(nx)\,dx$.

(ii) Βρείτε το $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1} x^n \cos(nx)\,dx$.

<u>Λύση:</u> (i) Το ολοκλήρωμα Riemann, όταν υπάρχει, ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα $d\lambda$.

Άρα, θέλουμε να βρούμε το $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} f_n\, d\lambda$,

όπου $f_n : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) := x^n \cos(nx)$ $\forall x \in [0, 1/2]$.

Έχουμε:

- $f_n \longrightarrow 0$ κ.σ. :

$\forall x \in [0, 1/2]$, $|f_n(x)| = |x|^n \cdot \underbrace{|\cos(nx)|}_{\leq 1} \leq |x|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(αφού $|x| < 1$).

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| = |x|^n \cdot |\cos(nx)| \leq |x|^n \leq 1$,

$x \in [0, 1/2]$

$\forall x \in [0, 1/2]$, όπου

$$\int_{[0,1/2]} 1 \, d\lambda = 1 \cdot \lambda\left([0,1/2]\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < +\infty .$$

Άρα, από το Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\int_{[0,1/2]} f_n \, d\lambda \longrightarrow \int_{[0,1/2]} 0 \, d\lambda = 0,$$

δηλ. $\displaystyle\int_0^{1/2} x^n \cos(nx)\, dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(ii) Τώρα, ορίζουμε $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) := x^n \cos(nx) \quad \forall x \in [0,1].$$

Έχουμε:

- $f_n \to 0$ κ.σ. $\underline{\lambda\text{-σ.π.}}$: $\forall x \in [0,1)$,

$$|f_n(x)| = |x|^n \cdot |\cos(nx)| \le |x|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ καθώς } \underset{|x| < 1}{\uparrow}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \le |x|^n \underset{x \in [0,1]}{\le} 1$, $\forall x \in [0,1]$, με $\int_{[0,1]} 1 \, d\lambda = 1 < +\infty$.

Άρα, πάλι από το Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\int_0^1 f_n \, d\lambda \longrightarrow \int_0^1 0 \, d\lambda = 0,$$

δηλ. $\displaystyle \int_0^1 x^n \cos(nx) dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$ ■

(6.22) ΝΔΟ $\displaystyle \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$

<u>Λύση:</u> Ξέρουμε ότι:

- Αφού η e^{-x} είναι Riemann-ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,b]$, και $e^{-x} \geq 0$ $\forall x$,

  η $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{-x}$ $\forall x \in [0, +\infty)$

  ικανοποιεί:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx \left(= \int_0^{+\infty} f(x) dx \right) = \int_{[0,+\infty)} f \, d\lambda.$$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, η $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) := \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(x)$

$\forall\ x \in [0,+\infty)$ ικανοποιεί :

$$\int_{[0,+\infty)} f_n \, d\lambda = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx \ .$$

Άρα, πρέπει ΝΔΟ $\displaystyle\int_{[0,+\infty)} f_n \, d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[0,+\infty)} f \, d\lambda$.

Έχουμε:

- $f_n \longrightarrow f$ κ.σ. : Έστω $x \in [0,+\infty)$.

Από Απειροστικό, ξέρουμε ότι

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x} \ .$$

Επομένως, $\underbrace{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(x)}_{= f_n(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{e^{-x}}_{= f(x)}$,

αφού $\chi_{[0,n]}(x) = 1$ για όλα τα μεγάλα n (μεγαλύτερα του x).

• $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n| \le f$: Έστω $n\in\mathbb{N}$. Έστω $x\in[0,+\infty)$.

⇝ Αν $x>n$, τότε $\chi_{[0,n]}(x)=0$

$$\to f_n(x)=0 \to |f_n(x)|\le|f(x)|.$$

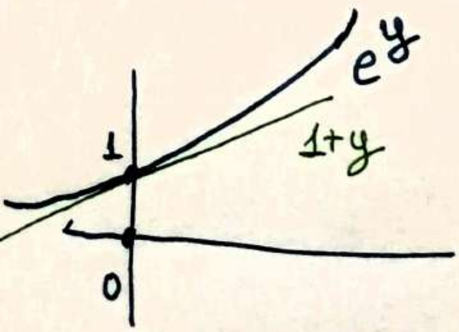
⇝ Αν $x\le n$, δηλ. $x\in[0,n]$, τότε

$f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$, και άρα θέλουμε:

$$|f_n(x)| \le e^{-x}$$

$$\overset{\frac{x}{n}\le 1}{\Longleftrightarrow} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \le e^{-x}$$

$\Longleftrightarrow 1-\frac{x}{n} \le e^{-\frac{x}{n}}$. Αυτό ισχύει, καθώς η e^y είναι κυρτή, και άρα το γράφημά της θα πάνω από την εφαπτομένη της $1+y$ στο 0.



Δηλ., $1+y\le e^y \quad \forall y\in\mathbb{R}$

$$\overset{y=-\frac{x}{n}}{\Longrightarrow} 1-\frac{x}{n}\le e^{-\frac{x}{n}}.$$

Αφού $\displaystyle\int_{[0,+\infty)} f\,d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-x}\,dx$

$$= -\lim_{n\to+\infty}\left[e^{-x}\right]_0^n = -\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n}-1\right) = 1 - \cancel{\lim_{n\to+\infty} e^{-n}}^{\,0}$$

$$= 1 \underline{\underline{< +\infty}},$$

από Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει ότι

$$\int_{[0,+\infty)} f_n\,d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[0,+\infty)} f\,d\lambda,$$

δηλαδή

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \quad (=1).$$

$\blacksquare$