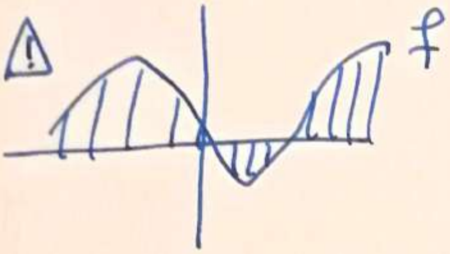
→ Η 1-νόρμα και ο χώρος $L^1(\mu)$:

→ Ορισμός: Για κάθε μετρήσιμη $f:(X,\mathcal{A},\mu)\to[-\infty,+\infty]$, ορίζουμε $\|f\|_1 := \int |f|\,d\mu$.

⚠ 

$\|f\|_1$ = το εμβαδό (ως προς μ) μεταξύ του γραφήματος της f και του άξονα των x.

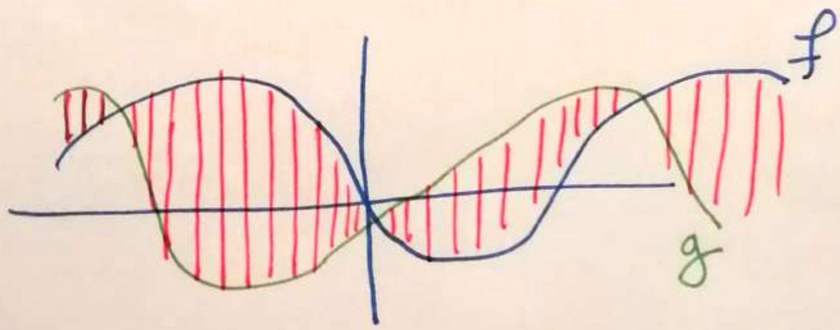
⚠ $\|f\|_1 < +\infty \iff \int |f|\,d\mu < +\infty$,

δηλ. $\iff$ f ολοκληρώσιμη,

δηλ. $\iff$ $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

⚠ $\forall\, f,g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, έχουμε ότι $f-g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (αφού ο $\mathcal{L}^1(\mu)$ είναι διανυσματικός χώρος), άρα

$\|f-g\|_1 < +\infty$.



$\|f-g\|_1$ = το εμβαδό (ως προς μ) μεταξύ των γραφημάτων των f και g.

Παρατηρούμε ότι η $\|f-g\|_1$ είναι ένα είδος απόστασης μεταξύ των $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Πράγματι, η $\|\cdot\|_1$ έχει πολλές ιδιότητες νόρμας: $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, και

(i) $\|f\|_1 \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \cdot \|f\|_1$

$$\left(\|\lambda f\|_1 = \int |\lambda f| \, d\mu = \int |\lambda| \cdot |f| \, d\mu = |\lambda| \cdot \int |f| \, d\mu = |\lambda| \cdot \|f\|_1 \right),$$

(iii) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$, $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$$\left(\|f+g\|_1 = \int |f+g| \, d\mu \leq \int (|f|+|g|) \, d\mu = \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1 \right).$$

$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in X$

Η μόνη ιδιότητα νόρμας που δεν ικανοποιεί η $\|\cdot\|_1$ είναι η εξής: " $\|f\|_1 = 0 \Leftarrow f = 0$, δηλ. $f(x) = 0 \ \forall x \in X$ ".

Αυτό που στην πραγματικότητα ισχύει (έχει δειχθεί) είναι ότι $\boxed{\|f\|_1 = 0 \iff f = 0 \ \ \mu\text{-σ.π.}}$

(αφού $\|f\|_1 = 0 \iff \int |f| \, d\mu = 0 \underset{|f| \geq 0}{\iff} |f| = 0$ μ-σ.π.

$\iff f = 0$ μ-σ.π., και όχι αναγκαστικά παντού).

Π.χ. η $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ικανοποιεί ότι $\|f\|_1 = \int |f| \, d\lambda = 1 \cdot \lambda(\{0\}) = 1 \cdot 0 = 0$,

ενώ η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

Έτσι, λέμε ότι η $\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι ψευδονόρμα, και όχι νόρμα.

Παρόμοια, η $d : \mathcal{L}^1(\mu) \times \mathcal{L}^1(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ με

$$d(f, g) = \|f - g\|_1$$

ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες μετρικής εκτός από μία. Συγκεκριμένα, ισχύουν τα:

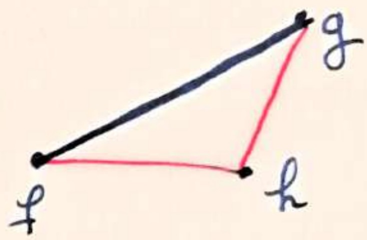
(i) $d(f,g) \geq 0 \quad \forall f,g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(ii) $d(f,g) = d(g,f) \quad \forall f,g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$$\left(\|f-g\|_1 = \|g-f\|_1 \right)$$

(iii) $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g), \quad \forall f,g,h \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$$\Big(\|f-g\|_1 = \|(f-h)+(h-g)\|_1 \leq \|f-h\|_1 + \|h-g\|_1 \Big).$$



Όμως, δεν ισχύει ότι

$$\text{"} d(f,g)=0 \Leftrightarrow f=g, \text{ δηλ. } f(x)=g(x) \ \forall x \in X \text{"},$$

καθώς $d(f,g)=0 \Leftrightarrow \|f-g\|_1 = 0$

$\Leftrightarrow f-g=0$ μ- σ.π.

$\Leftrightarrow f=g$ μ- σ.π. (και όχι αναγκαστικά παντού).

Άρα, η d είναι ψευδομετρική, και όχι μετρική.

Παρατηρούμε πως, αφού θέλουμε $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$,

ενώ έχουμε $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-σ.π.,

πρέπει να δημιουργήσουμε ένα χώρο όπου όλες οι συναρτήσεις f με $\|f\|_1 = 0$ ταυτίζονται με τη μηδενική συνάρτηση. Παρόμοια, αφού θέλουμε

$\|f-g\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = g$, ενώ έχουμε

$\|f-g\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = g$ μ-σ.π.,

πρέπει στο χώρο μας να ταυτίσουμε κάθε δύο f, g με $f = g$ μ-σ.π. (δηλαδή, να τις βλέπουμε ως το ίδιο διάνυσμα του χώρου μας).

Τότε, η $\|\cdot\|_1$ θα είναι νόρμα στο χώρο μας, και η d θα είναι μετρική

(καθώς τότε $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow$ η f είναι το μηδενικό διάνυσμα του χώρου,

και $\|f-g\|_1 = 0 \Leftrightarrow$ οι f, g είναι το ίδιο διάνυσμα του χώρου.

Ο χώρος αυτός ονομάζεται $L^1(\mu)$.

→ <u>Ορισμός:</u> Ορίζουμε

$$L^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu) /_{\sim}$$

$$= \left\{ f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R} : \int |f| d\mu < +\infty \right\} /_{\sim},$$

όπου $f \sim g \overset{\text{op}}{\Longleftrightarrow} f = g \ \mu$-σ.π.

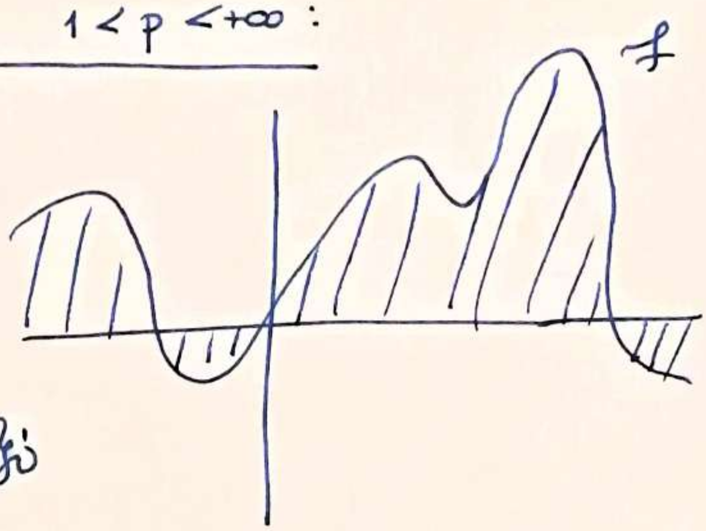
(Δηλαδή, κρατάμε έναν αντιπρόσωπο f από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Η κλάση ισοδυναμίας της f αποτελείται από τις $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ που διαφέρουν από την f μόνο σε σύνολο μέτρου (μ) 0.)

Παρατηρούμε ότι, αν $\|f\|_1 = 0$ για κάποια $f \in L^1(\mu)$, τότε η f είναι το $0 \in L^1(\mu)$,

και αν $\|f-g\|_1 = 0$, τότε οι αντιπρόσωποι f, g είναι ίσοι. Άρα, προκύπτει το εξής.

→ <u>Πρόταση:</u> Ο $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος με νόρμα.

→ Οι χώροι $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$, $1 < p < +\infty$:



Ξέρουμε πως το $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$ είναι το εμβαδό (ως προς μ) μεταξύ του γραφήματος της f και του άξονα των x.

Στο $\int |f|^1 d\mu$, η δύναμη 1 σημαίνει πως δίνουμε ίδιο "βάρος" σε όλες τις τιμές $|f(x)|$.

Αν όμως χρησιμοποιούσαμε το $\int |f|^p d\mu$, για κάποιο $p>1$, τότε θα δίναμε μεγαλύτερο "βάρος" στις μεγάλες τιμές της $|f|$, και μικρότερο στις μικρές (π.χ., αν $p=2$, τότε $(100)^p = (100)^2 >> 100$,

ενώ $(1/100)^p = \left(\frac{1}{100}\right)^2 << \frac{1}{100}$

Παρόμοια, αν $|f(x)|>1$, τότε $|f(x)|^2 > |f(x)|$,

ενώ αν $|f(x)|<1$, τότε $|f(x)|^2 < |f(x)|$).

→ <u>Ορισμός:</u> Για κάθε $f:(X,\mathcal{A},\mu)\to[-\infty,+\infty]$ μετρήσιμη, και κάθε $1<p<+\infty$, ορίζουμε

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

⚠ Το $\|f\|_p$ είναι ένα είδος "εμβαδού" μεταξύ του γραφήματος της f και του άξονα των x, όπου, καθώς το p μεγαλώνει, όλο και μεγαλύτερη έμφαση δίνεται στα μεγάλα $|f(x)|$, και όλο και περισσότερο αγνοούμε τα μικρά $|f(x)|$.

→ <u>Ορισμός:</u> Ορίζουμε

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \Big\{ f:(X,\mathcal{A},\mu)\to\mathbb{R} \;:\; \underbrace{\int |f|^p \, d\mu < +\infty}_{\Updownarrow \; \|f\|_p<+\infty} \Big\},$$

και $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/_\sim$, όπου

$$f\sim g \overset{\text{op}}{\Longleftrightarrow} f=g \;\; \mu\text{-σ.π.}$$
$$(\Longleftrightarrow \|f-g\|_p = 0).$$

→ <u>Πρόταση:</u> Ο $L^p(\mu)$ είναι διανυσματικός χώρος.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $f, g \in L^p(\mu)$, και $a \in \mathbb{R}$.

- $\boxed{af \in L^p(\mu)}$: $\int |a \cdot f|^p d\mu = \int |a|^p \cdot |f|^p d\mu$

$$= |a|^p \cdot \underbrace{\int |f|^p d\mu}_{<+\infty} < +\infty.$$

- $\boxed{f+g \in L^p(\mu)}$: Θέλουμε να δείξουμε ότι $\int |f+g|^p d\mu < +\infty$.

$\forall x \in X$, $|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p$

$$\leq \left(2 \cdot \max\{|f(x)|, |g(x)|\}\right)^p$$

$$= 2^p \cdot \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\}$$

$$\leq 2^p \cdot \left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right).$$

Άρα, από μονοτονία του ολοκληρώματος,

$$\int |f+g|^p d\mu \leq \int 2^p \cdot (|f|^p + |g|^p)\, d\mu$$

$$= 2^p \cdot \underbrace{\int |f|^p d\mu}_{<+\infty} + 2^p \cdot \underbrace{\int |g|^p d\mu}_{<+\infty} < +\infty.$$

Τώρα θα δείξουμε ότι ο $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα. Η τριγωνική ανισότητα

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

δεν είναι πλέον τετριμμένη (σε αντίθεση με την περίπτωση $p=1$). Λέγεται ανισότητα Minkowski, και στηρίζεται στην ανισότητα Hölder, την οποία και πρώτα θα δείξουμε.

→ $\boxed{\text{Ανισότητα Hölder}}$:

→ <u>Ορισμός:</u> Έστω $1<p<+\infty$. Ορίζουμε <u>τον συζυγή εκθέτη p' του p</u> μέσω της ισότητας

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

(⚠ Άρα, $p' = \frac{p}{p-1}$, και $1 < p' < +\infty$).

Επίσης, ορίζουμε $1' = \infty$ και $\infty' = 1$.

→ **Ανισότητα Young:** Έστω $1<p<+\infty$. Τότε, $\forall x,y\geq 0$,

$(x^p)^{1/p}\cdot(y^{p'})^{1/p'}$, "γεωμετρικός μέσος" των $x^p, y^{p'}$.

$$x\cdot y \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^{p'}}{p'}.$$

κυρτός συνδυασμός των $x^p, y^{p'}$

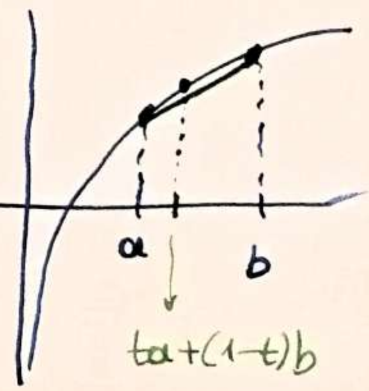
Απόδειξη:

- Αν $x=0$ ή $y=0$, είμαστε ΟΚ (αριστερό μέλος $=0$, δεξί μέλος ≥ 0).

- Αν $x,y>0$:

Αφού η $\ln:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι κοίλη, έχουμε ότι, $\forall\, a,b>0$, και $\forall\, t\in(0,1)$,

$$t\cdot\ln a+(1-t)\cdot\ln b\leq \ln\big(ta+(1-t)b\big)$$



$$\Longrightarrow \ln\big(a^t\cdot b^{1-t}\big)\leq \ln\big(ta+(1-t)b\big)$$

$$\underset{\ln\uparrow}{\Longrightarrow} a^t b^{1-t}\leq ta+(1-t)b$$

γενίκευση ανισότητας γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου, για τυχαία βάρη t, $1-t$ στο $(0,1)$ (αυτή για βάρη $1/2$, $1/2$).

Για $t=\frac{1}{p}$, έχουμε $1-t=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{p'}$.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα για αυτό το t, και για $a = x^p$, $b = y^{p'}$, έχουμε:

$$(x^p)^{1/p} \cdot (y^{p'})^{1/p'} \le \frac{1}{p} \cdot x^p + \frac{1}{p'} y^{p'},$$

δηλαδή $$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}.$$

■

→ <u>Ανισότητα Hölder</u>: Έστω $1 < p < +\infty$, και $f, g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες. Τότε,

$$\int |f \cdot g| \, d\mu \le \underbrace{\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}}_{= \|f\|_p} \cdot \underbrace{\left(\int |g|^{p'} d\mu\right)^{1/p'}}_{= \|g\|_{p'}}$$

Δεδομένου φυσικά ότι δεν υπάρχει απροσδιοριστία $0 \cdot (+\infty)$ στο δεξί μέλος.

⚠ Αν $f \in L^p(\mu)$ και $g \in L^{p'}(\mu)$ (δηλ. το δεξί μέλος είναι πεπερασμένο), τότε $f \cdot g \in L^1(\mu)$, και άρα υπάρχει το $\int f \cdot g \, d\mu$. Και φυσικά

$$\left| \int f \cdot g \, d\mu \right| \le \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'},$$

από τριγωνική ανισότητα και Hölder.

Απόδειξη: Η ανισότητα είναι τετριμμένη όταν το δεξί μέλος είναι $+\infty$, δηλ. όταν είτε $\|f\|_p = +\infty$ είτε $\|g\|_{p'} = +\infty$.

Η ανισότητα επίσης είναι τετριμμένη όταν $\|f\|_p = 0$ (καθώς τότε $f = 0$ στον $L^p(\mu)$), και όταν $\|g\|_{p'} = 0$ (καθώς τότε $g = 0$ στον $L^{p'}(\mu)$).

Άρα, αρκεί να δείξουμε τη Hölder όταν $\|f\|_p, \|g\|_{p'} \in (0, +\infty)$.

Βήμα 1: Δείχνουμε την ανισότητα Hölder όταν $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$.

Έστω τέτοιες f, g. Τότε,

$$\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} = 1, \text{ δηλ. } \int |f|^p d\mu = 1,$$

και $$\left(\int |g|^{p'} d\mu\right)^{1/p'} = 1, \text{ δηλ. } \int |g|^{p'} d\mu = 1. \text{ Και:}$$

$$\forall x \in X, \quad |f(x)| \cdot |g(x)| \underset{\text{Young}}{\leq} \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'} \longrightarrow$$

$$\Rightarrow \int |f\cdot g|\,d\mu \leq \int\left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^{p'}}{p'}\right)d\mu$$

$$= \frac{1}{p}\cdot\underbrace{\int|f|^p d\mu}_{\overset{\shortparallel}{1}} + \frac{1}{p'}\cdot\underbrace{\int|g|^{p'}d\mu}_{\overset{\shortparallel}{1}}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'} .$$

<u>Βήμα 2:</u> Ολοκληρώνουμε την απόδειξη για τυχαίες f, g με $\|f\|_p, \|g\|_{p'} \in (0, +\infty)$.

Έστω τέτοιες f, g. Τότε:

- $\left\| \frac{f}{\|f\|_p} \right\|_p = 1$: $\quad \int \left| \frac{f}{\|f\|_p} \right|^p d\mu = \cancel{\frac{1}{\|f\|_p^p}} \cdot \underbrace{\int |f|^p \cancel{d\mu}}_{\overset{\shortparallel}{\|f\|_p^p}} = 1.$

Θα ήταν τετριμμένο
αν ξέραμε ότι η $\|\cdot\|_p$
είναι νόρμα — αλλά
δεν το ξέρουμε ακόμα.

- Παρόμοια, $\left\| \frac{g}{\|g\|_{p'}} \right\|_{p'} = 1.$

Άρα, από το Βήμα 1,

$$\int \left| \frac{f}{\|f\|_p} \cdot \frac{g}{\|g\|_{p'}} \right| d\mu \leq 1,$$

δηλαδή $\displaystyle \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}} \cdot \int |f\cdot g| \, d\mu \leq 1,$

δηλαδή $\displaystyle \int |f\cdot g| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}.$

■

⟶ __Πρόταση:__ Ο $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.

__Απόδειξη:__ Η συνάρτηση $\|\cdot\|_p : L^p(\mu) \times L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τα εξής:

(i) $\|f\|_p \geq 0 \ \forall \ f \in L^p(\mu)$, και $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ μ-σ.π.
$\iff f = 0$ στον $L^p(\mu)$.

(ii) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in L^p(\mu)$:

$$\left(\int |\lambda f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\int |\lambda|^p \cdot |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \cdot \|f\|_p .$$

(iii) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \ , \ \forall f, g \in L^p(\mu)$:

$$\int |f+g|^p \, d\mu = \int |f+g|^{p-1} \cdot |f+g| \, d\mu$$

$$\leq \int |f+g|^{p-1} \cdot (|f|+|g|) \, d\mu$$

$$= \int |f+g|^{p-1} \cdot |f| \, d\mu + \int |f+g|^{p-1} \cdot |g| \, d\mu$$

Hölder

$$\leq \left(\int |f+g|^{(p-1)p'} d\mu \right)^{1/p'} \cdot \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

$$+ \left(\int |f+g|^{(p-1)p'} d\mu \right)^{1/p'} \cdot \left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1/p'} \cdot \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right).$$

$p' = \dfrac{p}{p-1}$

$\Rightarrow (p-1)p' = p$

Άρα, δείξαμε ότι

$$\int |f+g|^p \, d\mu \leq \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1/p'} \cdot \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right)$$

$$\Longrightarrow \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1 - \frac{1}{p'} = 1/p} \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad \text{δηλαδή}$$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

⚠ Η ανισότητα Hölder είναι ιδιαίτερα σημαντική στην ανάλυση. Χρησιμοποιείται συχνά για να <u>αυξήσουμε</u> τον εκθέτη p μιας p-νόρμας $\|\cdot\|_p$.

Για παράδειγμα, έστω $f:(X,\mathcal{A},\mu)\longrightarrow\mathbb{R}$ μετρήσιμη, και έστω ότι θέλουμε να περάσουμε από τη $\|f\|_1$ στην $\|f\|_2$. Αυτό γίνεται εύκολα μέσω Hölder:

$$\|f\|_1 = \int_X |f|\,d\mu = \int_X |f|\cdot \underbrace{1}_{\text{τρικ}}\,d\mu$$

$$\le \left(\int_X |f|^2\,d\mu\right)^{1/2}\cdot\left(\int_X \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{1^2}\,d\mu\right)^{1/2}$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$$= \|f\|_2\cdot\left(\mu(X)\right)^{1/2}.$$

Αν κιόλας $\mu(X)=1$ (π.χ. $X=[0,1]$, $\mu=\lambda$),

τότε $\|f\|_1\le\|f\|_2$.