**Θεωρία Μέτρου - Ασκήσεις στα Κεφάλαια 1 & 2**

1. (1.4, 2.3) Έστω $X \neq \emptyset$ και $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του $X$. Ορίζουμε

$$\limsup A_n := \{x \in X : \text{ το } x \text{ ανήκει σε άπειρα } A_n\},$$

$$\liminf A_n := \{x \in X : \text{ το } x \text{ ανήκει σε όλα τα τελικά } A_n\}.$$

   Δείξτε τα εξής:

   a) $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$, όπου η $\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right)_{k=1}^{+\infty}$ είναι φθίνουσα.

   b) $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n$, όπου η $\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n\right)_{k=1}^{+\infty}$ είναι αύξουσα.

   c) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

   d) (Λήμμα Borel-Cantelli): Έστω επιπλέον ότι η $\mathscr{A}$ είναι μια $\sigma$-άλγεβρα στον $X$, και ότι $A_n \in \mathscr{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty$, τότε $\mu(\limsup A_n) = 0$.

2. Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathscr{A}$. Δείξτε ότι αν $\mu(A_n) \to 0$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n) < +\infty$, τότε

$$\mu(\limsup A_n) = 0.$$

3. (1.7) Έστω ότι $I_R := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q} \text{ και } a < b\}$. Δείξτε ότι $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(I_R)$.

4. Έστω $\mu$ μέτρο στη $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, με $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$. Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$F(x) := \mu\big((-\infty, x]\big) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

   Δείξτε ότι η $F$ είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής .

5. Για κάθε χώρο μέτρου $(X, \mathscr{A}, \mu)$, ορίσαμε την πλήρωσή του $(X, \mathscr{A}_\mu, \overline{\mu})$. Συγκεκριμένα, ορίσαμε

$$\mathscr{A}_\mu := \{A \subseteq X : \exists\, E, F \in \mathscr{A} \text{ με } E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \mu(F \setminus E) = 0\}.$$

   Δείξτε ότι

$$\mathscr{A}_\mu = \{E \cup K : E \in \mathscr{A} \text{ και } K \ \mu\text{-μηδενικό}\}$$

   (δηλαδή ότι η $\mathscr{A}_\mu$ περιέχει ακριβώς τα υποσύνολα του $X$ που διαφέρουν από στοιχεία της $\mathscr{A}$ κατά $\mu$-μηδενικά σύνολα).

   (Προσοχή: $\mu$-μηδενικό σύνολο είναι οποιοδήποτε σύνολο που **περιέχεται** σε κάποιο με μέτρο $\mu$ ίσο με 0.)

6. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathscr{A}$ $\sigma$-άλγεβρα στο $X$.

   a) (2.9) Έστω $(\mu_n)_{n=1}^{+\infty}$ αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathscr{A})$ (δηλαδή, $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathscr{A}$). Δείξτε ότι η συνάρτηση $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ με

$$\mu(A) := \lim_{n \to +\infty} \mu_n(A) \quad \text{για κάθε } A \in \mathscr{A}$$

   είναι μέτρο.

b) (2.5) Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μέτρων στον $(X,\mathscr{A})$. Χρησιμοποιώντας το (a), δείξτε ότι η συνάρτηση $\mu:\mathscr{A}\to[0,+\infty]$ με

$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(A) \quad \text{για κάθε } A\in\mathscr{A}$$

είναι μέτρο.

c) (2.8) Χρησιμοποιώντας το (b), βρείτε ένα παράδειγμα ενός $\sigma$-πεπερασμένου μέτρου στον $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα ότι

$$\mu\big((a,b)\big) = +\infty \quad \text{για κάθε } a<b \text{ στο } \mathbb{R}.$$