Θεωρία Μέτρου - Ασκήσεις στα Κεφάλαια 3 & 4

1. Ερωτήσεις κατανόησης: απαντήστε στα παρακάτω.

   a) Ισχύει ότι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρες; (Ναι ή Όχι)

   b) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue-μετρήσιμο. Εξηγήστε (σε μία γραμμή) γιατί ισχύουν τα παρακάτω:
$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - a_n) : A \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty}(a_n, b_n), \text{ με } a_n < b_n \text{ στο } \mathbb{R}\Big\}\\ &= \min\{\lambda(B) : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \text{ με } B \supseteq A\}\\ &= \inf\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό } \subseteq \mathbb{R} \text{ με } U \supseteq A\}.\end{aligned}$$

   c) Δείξτε ότι το τελευταίο inf ΔΕΝ είναι πάντα min. Συγκεκριμένα, βρείτε $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα ότι δεν υπάρχει το
$$\min\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό } \subseteq \mathbb{R} \text{ με } U \supseteq A\}.$$

2. (3.6) Έστω A Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(A) < +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει Lebesgue-μετρήσιμο $F \subseteq A$ με $\lambda(F) = \frac{\lambda(A)}{2}$.

   (Υπόδειξη: Θα βοηθήσει να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \lambda(B \cap (-\infty, x])$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής.)

3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Συμβολίζουμε με A° το *εσωτερικό* του A, δηλαδή την ένωση όλων των ανοιχτών μπαλών του $\mathbb{R}^2$ που περιέχονται στο A. Ορίζουμε $\partial A := A \setminus A^\circ$, το *σύνορο* του A.[1]

   Δείξτε ότι, αν $\lambda_2^*(\partial A) = 0$, τότε το A είναι Lebesgue-μετρήσιμο (στον $\mathbb{R}^2$).

4. a) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι $\lambda(G_f) = 0$.

   (Εδώ, το $G_f := \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$ είναι το γράφημα της f, και με λ εννοούμε το λ_2.)

   b) (3.5) Δείξτε ότι, στον $\mathbb{R}^2$, κάθε ευθεία και κάθε κύκλος έχει μέτρο Lebesgue ίσο με 0.

5. a) (4.8) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής (δηλαδή, με την ιδιότητα ότι υπάρχει σταθερά $M \in (0, +\infty)$ ώστε $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$). Σταθεροποιούμε $a < b$ στο $\mathbb{R}$.

   (i) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Δείξτε ότι και $\lambda\big(f(A)\big) = 0$.

   (ii) Έστω $B \subseteq [a,b]$ ένα F_σ-σύνολο. Δείξτε ότι και το $f(B)$ είναι F_σ-σύνολο.

   (iii) Δείξτε ότι η f στέλνει Lebesgue-μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue-μετρήσιμα σύνολα.

   b) (3.10) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Δείξτε και ότι $\lambda(\{x^2 : x \in A\}) = 0$.

6. (4.4) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$. Έστω ότι το A έχει την εξής ιδιότητα:
$$\text{Για κάθε } t \in (-\delta, \delta), \text{ είτε το } c - t \in A \text{ είτε το } c + t \in A.$$

   Δείξτε ότι $\lambda^*(A) \ge \delta$.

[1] Τονίζουμε ότι αυτός δεν είναι ο συνήθης ορισμός του συνόρου.

7. (4.6) Έστω $A := \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Δείξτε τα παρακάτω.

   a) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ακολουθία $(I_n)_{n=1}^{+\infty}$ ανοιχτών διαστημάτων ώστε $\cup_{n=1}^{+\infty} I_n \supseteq A$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon$.

   b) Αν τα $I_1, \ldots, I_N$ είναι ανοιχτά διαστήματα με $I_1 \cup \ldots \cup I_N \supseteq A$, τότε $\sum_{n=1}^{N} \lambda(I_n) \geq 1$.

8. (3.18) Γράφουμε $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n : \, n \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, ορίζουμε

$$A(\varepsilon) := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

   Θέλουμε να μελετήσουμε την τομή των $A(\varepsilon)$ για $\varepsilon > 0$. Επομένως, ορίζουμε

$$A := \bigcap_{m=1}^{+\infty} A\left(\frac{1}{m}\right).$$

   Προφανώς, $\mathbb{Q} \subseteq A$. Είναι όμως ίσα;

   a) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

   b) Δείξτε ότι $\lambda([0,1] \setminus A(\varepsilon)) > 0$, για κάθε $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

   c) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \subsetneq A$. Συγκεκριμένα, δείξτε ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

9. (4.16β) Έστω A Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το A περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους k.