Θεωρία Μέτρου - Ασκήσεις στο Κεφάλαιο 6

Μέσα σε ένα ολοκλήρωμα: Χρησιμοποιούμε $d\lambda$ ή $d\lambda(\cdot)$ όταν ολοκληρώνουμε ως προς το μέτρο Lebesgue. Χρησιμοποιούμε dx όταν ολοκληρώνουμε κατά Riemann, και για τις γενικεύσεις του Riemann που μάθαμε στον Απειροστικό Λογισμό.

---

1. **Ερώτηση κατανόησης**: Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος μέτρου.

   a) Έστω $f:(X,\mathscr{A},\mu)\to[0,+\infty]$. Πότε ορίζεται το $\int f\,d\mu$;

   b) Έστω $f:(X,\mathscr{A},\mu)\to[-\infty,+\infty]$. Πότε ορίζεται το $\int f\,d\mu$;

   c) Έστω $f:(X,\mathscr{A},\mu)\to[-\infty,+\infty]$. Πότε λέμε ότι η f είναι (Lebesgue-)ολοκληρώσιμη;

2. Έστω $a_n\in\mathbb{R}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, με την ιδιότητα ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|<+\infty$. Έστω $f:(\mathbb{N},\mathscr{P}(\mathbb{N}),\nu)\to\mathbb{R}$ με $f(n)=a_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, όπου ν είναι το μέτρο απαρίθμησης.

   a) Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

   b) Δείξτε ότι
   $$\int f d\nu=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

   c) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, δείξτε ότι το άθροισμα των a_n είναι το ίδιο με όποια σειρά και αν προστεθούν.

3. a) Έστω $f:(X,\mathscr{A},\mu)\to[0,+\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\nu:\mathscr{A}\to[0,+\infty]$ με
   $$\nu(A):=\int_A f d\mu \quad \text{για κάθε } A\in\mathscr{A}.$$
   Δείξτε ότι το ν είναι μέτρο.

   b) Έστω $f:\big(\mathbb{R},\mathscr{L}(\mathbb{R}),\lambda\big)\to[0,+\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι
   $$\int_{[x,+\infty)} f d\lambda\to 0 \quad \text{καθώς το } x\to+\infty.$$
   (Αυτό μάς λέει ότι η μάζα της f ουσιαστικά συσσωρεύεται σε κάποιο μεγάλο διάστημα γύρω από το 0.)

4. Έστω $\delta>0$ και $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με
   $$f(x)=\frac{\sin x}{x}+\frac{\delta x}{x+1} \quad \text{για κάθε } x>0.$$
   Δείξτε ότι, για κάθε $\alpha>0$,
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,\alpha]} f(nx)\,d\lambda(x)=\delta\alpha.$$

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση.

   a) Εξηγήστε γιατί η f' είναι Lebesgue-μετρήσιμη.

   b) Έστω ότι επιπλέον $|f'(x)| \leq 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n \cdot \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) \, d\lambda(x) = \int_0^1 f'(x) \, d\lambda(x).$$

6. (Θεώρημα **Egorov**) Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : (X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ώστε $f_n \to f$ κ.σ. μ-σ.π.

   Δείξτε ότι, αν $\mu(X) < +\infty$, τότε η σύγκλιση στην f είναι σχεδόν ομοιόμορφη, δηλαδή: για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(X \setminus A) < \delta$, ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A.

   [Αυτή είναι μία από τις λεγόμενες '**3 αρχές του Littlewood**', και λέει ότι, σε χώρο πεπερασμένου μέτρου, η κατά σημείο σύγκλιση είναι πρακτικά ομοιόμορφη (modulo μικρά σφάλματα)].

7. (6.36) Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $[0,1]$, και έστω $a_n \in \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{|x - q_n|}}$$

   συγκλίνει απολύτως για λ-σχεδόν κάθε $x \in [0,1]$.