Θεωρία Μέτρου - Εβδομάδα 3 - Ασκήσεις

1. Έστω $X \neq \emptyset$ και έστω $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία ξένων υποσυνόλων του X με την ιδιότητα ότι $X = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Έστω $\mathscr{F} := \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$. (Με άλλα λόγια, η $\mathscr{F}$ είναι μία διαμέριση του X.)

   a) Δείξτε ότι
   $$\sigma(\mathscr{F}) = \left\{ \bigcup_{n \in I} A_n : \, I \subseteq \mathbb{N} \right\}.$$

   b) Έστω $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο στη $\sigma(\mathscr{F})$ με $\mu(A_n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\emptyset \neq \mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$.

   a) Έστω
   $$\mathscr{F}^c := \{X \setminus F : \, F \in \mathscr{F}\}.$$
   Δείξτε ότι $\sigma(\mathscr{F}) = \sigma(\mathscr{F}^c)$.

   b) Έστω ότι η $\mathscr{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις. Έστω μέτρα $\mu, \nu : \sigma(\mathscr{F}) \to [0, +\infty]$, με
   $$\mu(F) = \nu(F) \quad \text{για κάθε } F \in \mathscr{F}$$
   και
   $$\mu(X) = \nu(X) < +\infty.$$
   Δείξτε ότι $\mu(A) = \nu(A)$ για κάθε $A \in \sigma(\mathscr{F})$.

3. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\emptyset \neq \mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$, κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές. Έστω μέτρα $\mu, \nu : \sigma(\mathscr{F}) \to [0, +\infty]$, με
   $$\mu(F) = \nu(F) \quad \text{για κάθε } F \in \mathscr{F}.$$
   Τέλος, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν ξένα $F_1, F_2, F_3, \ldots \in \mathscr{F}$ με
   $$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \text{ και } \mu(F_n) \; (= \nu(F_n)) \; < +\infty \; \forall n \in \mathbb{N}.$$
   Δείξτε ότι $\mu(A) = \nu(A)$ για κάθε $A \in \sigma(\mathscr{F})$.