Θεωρία Μέτρου - Εβδομάδα 9 - Ασκήσεις

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \{1,2,3\}, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
Βρείτε τα $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$ και $\int_{\mathbb{R}} f \, d\nu$, όπου το λ είναι το μέτρο Lebesgue και το ν το μέτρο απαρίθμησης στο $\mathbb{R}$.

2. Έστω $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_{\mathbb{N}} f \, d\nu.$$

3. Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : (X, \mathscr{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι
$$\int f \, d\mu = 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad f = 0 \ \mu\text{-σ.π.}$$
Παρατηρήστε ότι αυτό σημαίνει το εξής: Αν μία μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση είναι θετική *πάνω από σύνολο θετικού μέτρου*, τότε έχει θετικό ολοκλήρωμα.

4. (Ανισότητα Markov) Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : (X, \mathscr{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη. Δείξτε ότι, για κάθε $a > 0$,
$$\mu\big(\{x \in X : \ f(x) \geq a\big) \leq \frac{\int f \, d\mu}{a}.$$

5. Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : (X, \mathscr{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη, με $\int f \, d\mu < +\infty$. Δείξτε ότι
$$\mu\big(\{x \in X : \ f(x) = +\infty\}\big) = 0.$$