Θεωρία Μέτρου - Εβδομάδες 7 & 8 - Ασκήσεις

1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$, αποκαλούμε *βελόνα με βάση το* x το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα

$$\{x+(a,0,0):\ a \in (0,1]\}$$

μήκους 1 (χωρίς το άκρο x).

Έστω $K \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ με την ιδιότητα ότι, για κάθε $x \in K$, ολόκληρη η βελόνα με βάση το x ζει εκτός του K (δηλαδή περιέχεται στο K^c). Δείξτε ότι $\lambda(K)=0$.

2. Δείξτε ότι, αν $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A)>0$, τότε:

a) Υπάρχουν $x,y \in A$ ώστε το $|x-y|$ να μην ανήκει στο σύνολο Cantor.

b) Υπάρχουν $x,y \in A$ ώστε το $|x-y|$ να είναι ρητός.

c) Υπάρχουν $x,y \in A$ ώστε το $|x-y|$ να είναι άρρητος. (Αυτό ήταν και άσκηση στο Φυλλάδιο 1, όμως εδώ ψάχνουμε μία δεύτερη απόδειξη που να μπορεί να εφαρμοστεί και στο (b).)

d) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A)>0$. Τότε, υπάρχουν ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A, με

$$a_n - b_n \to 0 \quad \text{και} \quad a_n - b_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \ \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

3. Σωστό ή λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

a) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αντιστρέφει Lebesgue-μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue-μετρήσιμα σύνολα. Δηλαδή, $f^{-1}(A) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ για κάθε $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

b) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αντιστρέφει Borel-μετρήσιμα σύνολα σε Borel-μετρήσιμα σύνολα. Δηλαδή, $f^{-1}(A) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

c) Κάθε συνεχής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ στέλνει Lebesgue-μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue-μετρήσιμα σύνολα. Δηλαδή, $f(A) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ για κάθε $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

4. Έστω C το σύνολο Cantor. Δείξτε ότι $C+C=[0,2]$ και $C-C=[-1,1]$.

(Παρατηρήστε ότι, αφού $C \subset [0,1]$, τότε σίγουρα $C+C \subseteq [0,2]$ και $C-C \subseteq [-1,1]$. Άρα, η άσκηση αυτή μάς λέει ότι, παρότι $\lambda(C)=0$, τα $C+C$ και $C-C$ είναι όσο μεγαλύτερα γίνεται.)

Υπόδειξη: Για να δείξουμε ότι το $[0,2]$ περιέχεται στο $C+C$, γράφουμε το τυχαίο $x \in [0,2]$ ως $2y$, για κάποιο $y \in [0,1]$. Άρα, το $y=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t_n}{3^n}$, όπου $t_n = 0,1$ ή 2 για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να γράψουμε το $2y$ σαν άθροισμα δύο στοιχείων του C;