Θεωρία Μέτρου - Εβδομάδες 4 & 5 - Ασκήσεις

1. Λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι *μεγάλο* αν έχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία έξω από κάθε φραγμένο διάστημα. Ορίζουμε $\mu^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ με
$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν το } A \text{ είναι αριθμήσιμο,} \\ 1, & \text{αν το } A \text{ είναι υπεραριθμήσιμο αλλά όχι μεγάλο,} \\ +\infty, & \text{αν το } A \text{ είναι μεγάλο.} \end{cases}$$
Δείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

2. Θεωρούμε τη σ-κάλυψη $\mathscr{C} := \{[a,b] : a < b,\ a,b \in \mathbb{R}\} \cup \emptyset$ του $\mathbb{R}$. Δημιουργήστε ένα εξωτερικό μέτρο $\mu^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$, ακολουθώντας τη γενική κατασκευή εξωτερικών μέτρων που έχουμε δει (ξεκινώντας με κάποια κατάλληλη $\tau : \mathscr{C} \to [0,+\infty]$), ώστε
$$\mu^*([0,1]) \neq \tau([0,1])$$
και
$$\text{το } [0,1] \text{ να μην είναι } \mu^*\text{-μετρήσιμο.}$$

3. Δώστε ένα παράδειγμα ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, που είναι Lebesgue-μετρήσιμο, έχει $\lambda(A) > 0$, αλλά δεν περιέχει διάστημα της μορφής (a,b) με $a < b$.

4. a) Δείξτε ότι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$ είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές και ως προς στροφές.

   (Υπόδειξη: Για τις μεταφορές είναι πιο εύκολο να πάμε με τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue. Για τις στροφές είναι πιο εύκολο να πάμε με το χαρακτηρισμό $\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό με } U \supseteq A\}$.)

   b) Αποφανθείτε ότι και το ίδιο ισχύει για το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$.

5. Έστω ο κύκλος $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

   a) Δείξτε ότι $\lambda_2^*(S) = 0$

   b) Αποφανθείτε ότι ο S είναι Lebesgue-μετρήσιμο σύνολο στον $\mathbb{R}^2$, με $\lambda_2(S) = 0$.

6. Αποδείξτε τα παραπάνω, αλλά τώρα στην περίπτωση που το S είναι το περίγραμμα ενός τετραγώνου.

   (Υπόδειξη: Θα είναι πιο εύκολο να θεωρήσετε πρώτα την περίπτωση που οι πλευρές είναι παράλληλες στους βασικούς άξονες, και μετά να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 3.)

7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Συμβολίζουμε με A° το *εσωτερικό* του A, δηλαδή την ένωση όλων των ανοιχτών μπαλών του $\mathbb{R}^2$ που περιέχονται στο A. Ορίζουμε $\partial A := A \setminus A^\circ$, το *σύνορο* του A.[1]

   Δείξτε ότι, αν $\lambda_2^*(\partial A) = 0$, τότε το A είναι Lebesgue-μετρήσιμο (στον $\mathbb{R}^2$).

[1] Τονίζουμε ότι αυτός δεν είναι ο συνήθης ορισμός του συνόρου.

8. Έστω η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0,1)$, με $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$. Στο 1ο μάθημα, ορίσαμε ένα σύνολο N που περιέχει έναν ακριβώς αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισοδυναμίας.

   Ξέρουμε ότι το μέτρο Lebesgue $\lambda : \mathscr{L}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ ικανοποιεί τα εξής:

   (i) $\lambda([0,1)) = 1$.

   (ii) $\lambda(x+A) = \lambda^*(A)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ (Άσκηση 3).

   (iii) Για κάθε $A_1, A_2, \dots$ ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$, ισχύει ότι $\lambda(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)$.

   Ακολουθώντας την απόδειξη του θεωρήματος που δείξαμε στο μάθημα 1, αλλά τώρα για το $\lambda : \mathscr{L}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$, δείξτε ότι $N \notin \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

9. Έστω A Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(A) < +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει διάστημα (a,b) στο $\mathbb{R}$ ώστε $\lambda\big(A \cap (a,b)\big) > \frac{2}{3}(b-a)$.

10. Έστω B Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(B) < +\infty$.

    a) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \lambda(B \cap (-\infty, x])$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής.

    b) Έστω ότι $\lambda(B) = 10$. Δείξτε ότι υπάρχει $A \subset B$ με $\lambda(A) = 5$.

11. Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το A είναι Lebesgue-μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$b - a = \lambda^*\big((a,b) \cap A\big) + \lambda^*\big((a,b) \setminus A\big) \quad \text{για κάθε } a < b \text{ στο } \mathbb{R}.$$