Θεωρία Μέτρου - Εβδομάδα 1 - Ασκήσεις

1. Έστω $\lambda : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ με τις εξής ιδιότητες:
   a) $\lambda([0,1)) = 1$.
   b) $\lambda(x+A) = \lambda(A)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$.
   c) Για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, ισχύει ότι $\lambda\left(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)$.

   Δείξαμε ότι τέτοια λ δεν υπάρχει. Ωστόσο, αν υπήρχε, δείξτε ότι θα ίσχυαν και τα παρακάτω:
   a) $\lambda(\emptyset) = 0$.
   b) Αν $A \subseteq B$ $(\subseteq \mathbb{R})$, τότε $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.
   c) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A_1, \ldots, A_n$ ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$, έχουμε ότι $\lambda(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \lambda(A_1) + \ldots + \lambda(A_n)$.
   d) $\lambda([0,q)) = q$, για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.
   e) $\lambda([0,a)) = a$, για κάθε $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   f) $\lambda(\{a\}) = 0$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
   g) $\lambda([a,b)) = \lambda([a,b]) = \lambda((a,b]) = \lambda((a,b)) = b-a$ για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$.

2. Ορίσαμε μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0,1)$, με $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$. Κατόπιν φτιάξαμε ένα σύνολο N που περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Φυσικά υπάρχουν πολλά τέτοια σύνολα N, ανάλογα με την επιλογή κάθε αντιπροσώπου. Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει τέτοιο $N \subseteq [0,\varepsilon)$.

3. Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο. Ορίζουμε
   $$\mathscr{A} := \{A \subseteq X : A \text{ αριθμήσιμο ή } X \setminus A \text{ αριθμήσιμο.}\}$$
   Δείξτε ότι η $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι η οικογένεια
   $$\mathscr{A} := \{f(K) : K \subseteq \mathbb{R} \text{ συμπαγές}\}$$
   δεν είναι άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.

5. Δείξτε ότι η οικογένεια
   $$\mathscr{D} := \{\text{αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων της μορφής } (a,b), \text{ με } a \leq b\}$$
   δεν είναι σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.

6. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \subseteq \mathscr{P}(X)$ μη κενές. Δείξτε ότι

$$\sigma(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2) = \sigma\Big(\sigma(\mathscr{F}_1) \cup \sigma(\mathscr{F}_2)\Big).$$

7. Έστω $X \neq \emptyset$ και έστω $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία ξένων υποσυνόλων του X με την ιδιότητα ότι $X = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Έστω $\mathscr{F} := \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$. (Με άλλα λόγια, η $\mathscr{F}$ είναι μία διαμέριση του X.) Δείξτε ότι

$$\sigma(\mathscr{F}) = \left\{ \bigcup_{n \in I} A_n : I \subseteq \mathbb{N} \right\}.$$

8. Έστω $X \neq \emptyset$, $\mathscr{F}$ σ-άλγεβρα στο X, και $B \subset X$ με την ιδιότητα ότι $B \notin \mathscr{F}$. Δείξτε ότι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει συγχρόνως όλα τα στοιχεία της $\mathscr{F}$ και το B (δηλαδή η $\sigma(\mathscr{F} \cup \{B\})$) είναι η οικογένεια

$$\mathscr{C} := \{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B^c) : A_1, A_2 \in \mathscr{F}\}.$$

Υπόδειξη για ασκήσεις 6-8: Γενικώς για να δείξουμε κάτι της μορφής $\sigma(\mathscr{F}) = \mathscr{A}$, δείχνουμε ότι $\mathscr{A} \subseteq \sigma(\mathscr{F})$, και ότι $\sigma(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{A}$. Για το τελευταίο, αρκεί να δειχθεί ότι η $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathscr{F}$ (καθώς τότε αυτόματα περιέχει και τη $\sigma(\mathscr{F})$.