Θεωρία Μέτρου - Εβδομάδα 2 - Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\Delta_{(\cdot,+\infty)}\right) = \sigma\left(\Delta_{[\cdot,\cdot]}\right)$, όπου

$$\Delta_{(\cdot,+\infty)} = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}, \quad \Delta_{[\cdot,\cdot]} = \{[a,b] : a < b \text{ στο } \mathbb{R}\}.$$

2. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι στον $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένο με τη συνήθη (Ευκλείδεια) μετρική, κάθε ανοιχτό σύνολο είναι αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών μπαλών.

3. Έστω $(C_i)_{i\in I}$ οικογένεια κλάσεων Dynkin, όπου το I είναι τυχαίο σύνολο δεικτών. Δείξτε ότι η $\bigcap_{i\in I} C_i$ είναι κλάση Dynkin.

4. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\emptyset \neq \mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$.
   a) Έστω $\mathscr{F}^c := \{X \setminus F : F \in \mathscr{F}\}$. Δείξτε ότι $\sigma(\mathscr{F}) = \sigma(\mathscr{F}^c)$ και $\delta(\mathscr{F}) = \delta(\mathscr{F}^c)$.
   b) Έστω ότι η $\mathscr{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις. Δείξτε ότι $\sigma(\mathscr{F}) = \delta(\mathscr{F})$.

5. a) Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι F_σ αλλά όχι G_δ.
   b) Δώστε ένα παράδειγμα συνόλου στη Borel σ-άλγεβρα $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, που δεν είναι ούτε G_δ ούτε F_σ.

   Ιδέα για το (α): Γράφουμε $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$. Έστω ότι $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$, όπου τα U_n είναι ανοιχτά. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Baire, τί μπορούμε να πούμε για την $\bigcap_{n=1}^{+\infty} (U_n \setminus \{q_n\})$;

6. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathscr{A}$ σ-άλγεβρα στο X. Δείξτε ότι το $\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty]$, με

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset, \\ +\infty, & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

   είναι μέτρο.

   (Παρατηρήστε ότι αυτό αποδεικνύει ότι μπορεί να ορισθεί μέτρο πάνω σε κάθε σ-άλγεβρα.)

7. Έστω $X \neq \emptyset$ και $x_0 \in X$. Ορίζουμε $\delta_{x_0} : \mathscr{P}(X) \to [0,+\infty]$ με

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_0 \in A, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

   είναι μέτρο, και μάλιστα μέτρο πιθανότητας.

8. Εξηγήστε γιατί ο χώρος μέτρου $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \nu)$, όπου ν είναι το μέτρο απαρίθμησης, είναι σ-πεπερασμένος.

9. Δώστε ένα παράδειγμα πεπερασμένα προσθετικού μέτρου που δεν είναι μέτρο.

10. Έστω μ μέτρο στη $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, με $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$. Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$F(x) := \mu\big((-\infty, x]\big) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

    Δείξτε ότι η F είναι δεξιά συνεχής .